

**IMPACT DES FUTURES NORMES IFRS SUR
LA TARIFICATION ET LE PROVISIONNEMENT
DES CONTRATS D'ASSURANCE VIE :
MISE EN ŒUVRE DE METHODES PAR SIMULATIONS**

Pierre THEROND

Mémoire d'actuaire ISFA

Directeur de mémoire : Frédéric PLANCHET

Septembre 2003

RESUME

Les futures normes IFRS vont conduire les entreprises, et notamment les sociétés d'assurance, à devoir identifier et provisionner de manière de plus en plus systématique les engagements sociaux.

Dans ce mémoire, nous rappelons les principaux résultats de la finance moderne utilisés en assurance dans le cadre de ces évaluations ; une illustration dans le cas de l'évaluation en *fair value* d'un contrat d'épargne avec taux garanti et clause de participation aux bénéfices est proposée, avec une méthode de valorisation de la clause de rachat anticipé.

Nous abordons également la problématique de l'assureur quant à l'allocation de ses actifs. Nous l'illustrons dans le cas d'un contrat d'épargne en euros et d'un régime de rentes en cours de service.

Nous proposons ensuite un modèle d'évaluation de l'engagement de l'entreprise associé à la mise en place d'un plan de stock-options.

Enfin nous développons une modélisation stochastique de l'évolution des placements d'une compagnie d'assurance réalisée dans le but d'être implémentée dans le logiciel de valorisation de l'*embedded value* de la société.

MOTS-CLES : IAS, IFRS, assurance vie, contrat d'épargne en euros, allocation d'actifs, *fair value*, probabilité de ruine, stock-options, modèles d'actifs, Monte-Carlo.

ABSTRACT

The future IFRS will force the companies to evaluate and to account all their charges.

In this paper, we first present the main results of the modern finance. Then we illustrate them to find the « fair value » of a life insurance participating policy and to propose a scheme to price the surrender option.

Then we expose the framework of the asset allocation of an insurer. We take two examples : a life insurance contract and a pension scheme.

We show the impact of the IFRS on a non-insurance company with employee stock-options. We first introduce the legal French constraints that meet a firm which has to deal with these options. And we propose a model to price these options.

KEYWORDS : IAS, IFRS, life insurance, interest rate guarantee, bonus, asset allocation, fair value, ruin probability, stock-options, models, Monte-Carlo.

SOMMAIRE

Préface	4
Introduction	5
Partie 1 : Les normes IFRS en assurance	6
Partie 2 : Utilisation de méthodes financières en assurance	20
Partie 3 : Méthodes financières et allocation d’actifs en assurance	38
Partie 4 : Engagement de l’entreprise associé à un plan de stock-options	68
Partie 5 : Document de spécification d’un modèle d’actifs	91
Conclusion.....	108
Bibliographie générale	110

PREFACE

Ce mémoire est le fruit de travaux réalisés, durant les quatre mois de mon stage de fin d'études, au sein du cabinet de conseil *JWA – Actuaires*.

Bien que très diverses par leur nature, ces tâches ont une problématique commune : l'utilisation de méthodes financières en assurance. Ce thème englobe le sujet de ce mémoire puisque les modes d'évaluation des engagements d'assurance préconisés par les normes IFRS sont largement d'inspiration financière.

Une partie conséquente de mon stage a été consacrée à l'écriture d'articles destinés à être publiés dans des revues financière et actuarielle et d'un support de formation. Les sujets abordés étant étroitement liés au thème central de ce mémoire, nous avons décidé de les y intégrer dans leur intégralité.

L'autre partie de mon temps, a été consacrée à l'application informatique d'outils financiers, que ce soit par la programmation de l'algorithme d'évaluation de l'engagement associé à un plan de stock-options ou, plus encore, aux développements entrepris pour doter d'un module d'évolution stochastique des actifs un logiciel de valorisation de sociétés d'assurance développé et utilisé par le Cabinet *JWA – Actuaires*.

Enfin, je tiens à remercier Frédéric PLANCHET pour l'intérêt des travaux qu'il m'a confiés et l'attention qu'il leur a portés.

INTRODUCTION

L'avènement des futures normes internationales, toujours en cours d'élaboration par l'*International Accounting Standards Board* (IASB), va constituer une véritable révolution pour les entreprises qui y seront soumises et parmi elles, les sociétés d'assurance cotées.

Alors que la comptabilité française est régie par le principe de prudence, les normes IFRS (pour *International Financial Reporting Standards*) ont pour but de retranscrire la « valeur économique » de l'entreprise la plus fidèle possible. La norme IAS 39 nous donne une illustration de cette volonté, puisqu'elle préconise la comptabilisation des produits financiers à leur *fair value* et non à leur valeur historique, comme l'impose le plan comptable général (Règlement n° 99.03 du 29 avril 1999).

A terme, les entreprises européennes cotées vont devoir comptabiliser leurs actifs et leurs passifs selon ces normes IFRS ; c'est dans cette optique que s'inscrit ce travail, en proposant des outils d'évaluation des différents engagements et en illustrant leur utilisation.

Ce mémoire se décompose en cinq parties, quatre d'entre elles s'articulant autour d'un document de référence. Ces documents, bien que de natures diverses, présentent différentes facettes du sujet :

- ✓ La première partie est consacrée aux normes IFRS et à leur application par les sociétés d'assurance.
- ✓ La deuxième partie est constituée d'un support de formation reprenant les outils financiers utiles au mode d'évaluation préconisé par l'IASB. Elles sont illustrées dans le cadre d'un contrat d'épargne simplifié.
- ✓ La troisième partie est constituée d'un article illustrant l'utilisation de ces outils en assurance et abordant le thème de l'allocation d'actifs des sociétés d'assurance.
- ✓ La quatrième partie, un autre article, est consacrée à l'évaluation d'un passif social d'entreprise, en l'occurrence un plan de stock-options.
- ✓ Enfin, dans la cinquième partie, le lecteur trouvera un document de spécification de modèle d'actifs réalisé dans l'objectif de rendre stochastique l'évolution des placements dans un logiciel de projection des éléments comptables d'une société d'assurance. Moins liée au thème central que les précédentes parties, elle illustre la mise en œuvre de modèles financiers dans une problématique de valorisation actif-passif d'une compagnie d'assurance.

Chaque document est précédé d'une introduction expliquant le contexte dans lequel il a été produit. Les deux articles sont retranscrits dans leur intégralité, avec notamment leur propre bibliographie. En fin de mémoire, une bibliographie générale reprend tous les documents utilisés lors de la rédaction de celui-ci.

La mise en place des nouvelles normes comptables internationales va certainement provoquer un choc culturel pour les entreprises françaises, peu familières des normes d'inspiration anglo-saxonne.

En effet, alors que la comptabilité française, élaborée par le législateur, est un outil de contrôle et de régulation sociale, dans le sens où elle est également destinée à apporter la confiance nécessaire à la vie des affaires, le modèle comptable anglo-saxon répond à une autre logique : offrir une vision économique de la firme, fournir des outils d'aide à la décision et mesurer la richesse créée pour l'actionnaire. Dans les pays anglo-saxons, l'établissement des règles comptables est confié à des organismes privés de normalisation (le FASB¹ aux Etats-Unis par exemple) au terme d'un processus qui consiste en un processus d'études et de discussions de groupes d'experts suivi de la publication d'*Exposure Drafts* (« exposés sondages » littéralement) dans le but de recueillir des commentaires avant la publication.

C'est sur ce modèle anglo-saxon que fonctionne l'IASB (anciennement IAS *Committee*) qui a été chargé par la Commission Européenne d'élaborer les normes internationales auxquelles devront se soumettre les entreprises cotées sur les marchés européens.

Cette partie est consacrée à une présentation des normes IAS/IFRS, de l'organisme qui les conçoit, de leur mode d'adoption et enfin de leur application par les entreprises. Nous nous attarderons plus particulièrement sur le projet de norme IFRS relatif aux contrats d'assurance.

SOMMAIRE

1.	Les normes IAS	7
1.1.	l'IASB	7
1.2.	L'adoption des normes	7
1.3.	Les différentes normes IAS	8
2.	Le passage aux normes IFRS	8
2.1.	La mise en place par les sociétés à but lucratif	9
2.2.	La norme IFRS : <i>Insurance Contracts</i>	9
2.3.	L'impact des normes IFRS sur les domaines fonctionnels de l'entreprise	13

¹ Le lecteur trouvera dans l'Annexe 2 la liste des sigles utilisés dans cette partie.

1. LES NORMES IAS

Créées pour homogénéiser la présentation et l'évaluation des comptes des sociétés à but lucratif, les normes IAS constituent la base d'un référentiel comptable commun unique, choisi pour consolider les comptes des sociétés européennes cotées sur les places financières européennes.

1.1. L'IASB

L'IASB est un organisme privé, basé à Londres, qui a pour vocation de produire des normes comptables internationales. Alors que des organismes tels que le Conseil National de la Comptabilité (CNC) ou le *Financial Accounting Standards Board* (FASB) ont été créés avec le mandat d'établir des normes comptables pour leur pays, la création de l'organisme de normalisation IASB est antérieure à la délégation qui lui a été accordée par l'Union Européenne (UE).

Doté d'un budget de 18 millions de dollars, l'IASB est un organisme de taille comparable au FASB. Comme l'organisme américain, il doit respecter un certain équilibre dans ses membres : au moins cinq experts-comptables, trois financiers d'entreprise, trois investisseurs et un universitaire parmi les quatorze membres de l'IASB. Deux de ses membres sont employés à mi-temps, les douze autres doivent cesser toute relation avec leur ancien employeur. Les membres sont désignés par l'*IASC Foundation* dont l'IASB est une filiale à 100%.

Organisme mondial, l'IASB n'a pas de caractère spécifiquement européen, contrairement à ce que laisse parfois penser l'opposition avec le FASB, souvent présentée comme une rivalité transatlantique.

1.2. L'ADOPTION DES NORMES

L'UE a décidé d'adopter les normes IAS/IFRS élaborées par l'IASB par le règlement communautaire du 19 juillet 2002.

Pour acquérir force légale dans l'UE, les normes IAS/IFRS sont soumises à un « mécanisme d'adoption » communautaire qui se déroule en deux étapes :

- ✓ Chaque norme fait l'objet d'un avis consultatif émis par l'*European Financial Reporting Advisory Group* (EFRAG) qui est un comité de professionnels placés auprès de la Commission Européenne.
- ✓ A la lumière de l'avis de l'EFRAG, une décision est prise par l'*Accounting Regulatory Committee* (ARC) qui vote à la majorité qualifiée.

Le règlement du 19 juillet 2002 évoque trois critères d'appréciation : la conformité aux textes législatifs européens existants, la capacité à donner lieu à une information financière de haute qualité et la contribution au « bien public européen » (qui permet de donner plus de marge de manœuvre à la décision de l'ARC).

En mai 2003, aucune norme n'avait été adoptée par ce mécanisme, en raison des vifs débats relatifs aux normes IAS 39 et IAS 32 sur la comptabilisation des actifs financiers qui ont empêché l'adoption « en bloc », un moment envisagée, de l'ensemble des IAS.

1.3. LES DIFFERENTES NORMES IAS

L'IASB a élaboré 41 normes dont on trouvera la liste en Annexe 1.

Dans l'exercice de son métier, l'actuaire se trouve principalement confronté aux normes suivantes :

- ✓ IAS 32 : *Financial Instruments: Disclosure and Presentation* et IAS 39 : *Financial Instruments: Recognition and Measurement* qui traitent de la comptabilisation des instruments financiers (« contrats qui donnent lieu à la fois à un actif financier pour une entreprise et à un passif financier ou un instrument de capitaux propres pour une autre ») et prévoient notamment la comptabilisation en *fair value*² de ces instruments.
- ✓ La norme IAS 19 : *Employee Benefits*, notamment pour l'évaluation des passifs sociaux d'entreprises (régime supplémentaire de retraite par exemple)

2. LE PASSAGE AUX NORMES IFRS

Le référentiel IFRS comprend :

- ✓ les 41 normes IAS qui conservent leur nom, déclinées en normes cadres, spécifiques et métier.
- ✓ Les textes d'interprétation des normes IAS : les 33 rapports du *Standing Interpretations Committee* (SIC).
- ✓ Les nouvelles normes, désormais dénommées IFRS.

² L'IASB définit la *fair value* par le « montant pour lequel un actif pourrait être échangé, ou un passif réglé, entre des parties bien informées et consentantes dans le cadre d'une transaction effectuée dans des conditions de concurrence normale ».

- ✓ Les nouveaux textes d'interprétation des normes IAS/IFRS : les *International Financial Reporting Interpretations Committee* (IFRIC).

Les sociétés d'assurance sont doublement impactées par ces normes : en tant que sociétés commerciales d'une part et en tant qu'assureurs d'autre part. En effet, des normes spécifiques aux contrats d'assurance sont en cours d'élaboration (ED 5 : *Insurance Contracts*).

2.1. LA MISE EN PLACE PAR LES SOCIÉTÉS A BUT LUCRATIF

A partir de 2005, toutes les sociétés cotées sur une place financière européenne devront établir leur compte consolidé selon les normes IFRS. Ils devront également retraiter selon ces normes leurs comptes de 2004 pour permettre une comparaison entre ces deux exercices.

Ces mêmes sociétés peuvent d'ores et déjà adopter ces normes internationales, sous certaines conditions. Il est toutefois important de préciser que de nombreux sujets sont encore en discussion.

Pour les sociétés, qui n'établissaient pas leurs comptes selon les IAS ou les US GAAP, la mise en place des normes IFRS va conduire à provisionner un certain nombre d'engagements (notamment des engagements sociaux) que les dispositions réglementaires françaises obligeaient seulement à signaler dans les annexes au bilan.

Les grands groupes, français notamment, sont déjà familiers des FAS et donc l'avènement des IFRS ne va pas constituer pour eux une révolution, mais plutôt une évolution puisque les principes sous-jacent à ces deux normes sont proches. Toutefois, certains engagements comme les plans de stock-options (pour les options d'achat) vont devoir être comptabilisés. La partie 4 du présent mémoire est consacrée à l'évaluation de l'engagement résultant de tels plans.

Enfin à partir de 2007, ce seront toutes les sociétés qui devront établir leurs comptes selon ces normes.

2.2. LA NORME IFRS : *INSURANCE CONTRACTS*

Avant sa disparition, l'*International Accounting Standards Committee* (IASC) avait entrepris un projet sur la comptabilisation des contrats d'assurance. Le projet de l'IASC s'intéressait à la comptabilisation du contrat d'assurance, partant du principe que dans l'activité d'assurance, c'est la nature aléatoire du contrat qui en fait une activité spécifique et non la nature des sociétés qui la pratique.

Un *Draft Statement of Principles* (DSOP) fût publié en 2001, l'IASB a poursuivi ses travaux sur ces bases et a proposé, en juillet 2003, un *Exposure Draft* : "ED 5 Insurance Contracts", qui sert de base aux discussions portant sur le provisionnement des contrats d'assurance. Ces documents sont disponibles sur le site de l'IASB³. La pleine application de cette nouvelle norme interviendra pendant la phase II, à partir de 2007.

2.2.1. CHAMP D'APPLICATION

La norme IFRS *Insurance Contracts* devra être appliquée à tous les contrats d'assurance, quelle que soit l'entité qui les propose. Selon l'ED 5, sont traités comme contrats d'assurance, les contrats qui répondent à la définition suivante :

« Un contrat par lequel une partie (l'assureur) accepte un risque d'assurance non négligeable d'une autre partie (l'assuré) en promettant de compenser l'assuré ou au autre bénéficiaire, si un événement incertain futur, affectant de manière défavorable le bénéficiaire du contrat, survient. »

Pour compléter cette définition, l'ED 5 propose les précisions suivantes :

- ✓ Un risque d'assurance est « un risque, autre que financier, transféré du détenteur de la police à l'assureur ».
- ✓ L'événement assuré doit être défavorable à l'assuré (ce qui exclut des contrats d'assurance les dérivés climatiques sauf si la survenance desdits événements climatiques affectent négativement l'assuré).
- ✓ Le risque est non négligeable si, et seulement si, il est possible que la survenance de l'événement assuré ait un effet négatif significatif, du point de vue de l'assureur, sur les flux générés par ce contrat.
- ✓ De nombreux contrats d'assurance vie comportent, à la fois des risques assurantiels et financiers, les dérivés incorporés aux contrats d'assurance devront être comptabilisés selon la norme IAS 39, à moins qu'ils ne soient eux-mêmes des contrats d'assurance (selon la définition de l'ED 5).

En exception à cette règle pour des raisons techniques, un assureur n'aura pas à séparer et évaluer en *fair value* une option de rachat sur un contrat d'assurance vie si la valeur de rachat est indépendante de l'évolution des marchés financiers.

Le lecteur trouvera en parties 2 et 3 du présent travail, des exemples de comptabilisation des dérivés incorporés à des contrats d'assurance vie illustrant la démarche proposée par l'IFRS sur ce sujet.

³ www.iasb.or.uk

Ainsi certains contrats, considérés réglementairement comme des contrats d'assurance, comme les contrats d'épargne en unités de compte sans garantie plancher ne le sont pas dans le cadre des normes IFRS. De même les dispositifs d'auto assurance prévus, en interne, par les entreprises ne se verront pas appliquer cette norme. Pour mémoire, rappelons la définition du contrat d'assurance sur laquelle s'accorde la doctrine française :

« L'assurance est, par définition, une opération par laquelle une partie, l'assuré, se fait promettre moyennant une rémunération, la prime, pour lui ou pour un tiers, en cas de réalisation d'un risque, une prestation par une autre partie, l'assureur, qui prenant en charge un ensemble de risques, les compense conformément aux lois de la statistique. »

2.2.2. COMPTABILISATION

La norme IFRS s'appliquera à tous les contrats d'assurance (dont les traités de réassurance). Elle ne s'appliquera pas aux autres actifs et passifs de l'assureur.

Pendant la phase 1 (avant le 1^{er} juillet 2007), l'IFRS exempte les assureurs de l'application complète de la norme IAS 8 : *Accounting Policies, Changes in Accounting Estimates and Errors* pour leurs contrats d'assurance et de réassurance. En revanche, conformément à cette norme :

- ✓ Ils ne doivent pas inscrire à leur passif des provisions pour catastrophe ou des provisions d'égalisation relatives à la production future.
- ✓ Ils doivent mener, à chaque date de *reporting*, des tests sur d'éventuelles pertes futures en projetant les estimations actuelles des flux futurs. Si ces tests mènent à la conclusion que le niveau des provisions est insuffisant, la différence doit être inscrite en perte.
- ✓ Ils doivent ôter de leur bilan des provisions techniques qui correspondraient à des obligations éteintes ou dont la société serait déchargée.
- ✓ Ils ne doivent pas déduire de leurs provisions les actifs provenant de la réassurance.

Bien qu'ayant pour objectif de fournir une valeur économique de l'entreprise, les normes IFRS n'autorisent pas l'inscription dans les comptes d'éléments ayant trait à la production future.

Durant cette même phase, l'assureur pourra changer sa politique d'évaluation des contrats d'assurance seulement si cela entraîne un gain dans la fiabilité et la pertinence des informations contenues dans ses relevés financiers. Le changement de politique comptable peut entraîner la classification de différents actifs en actifs financiers (évalués en *fair value*) ; la différence de valorisation pourra alors être inscrite en charge ou en produit.

La nouvelle politique d'évaluation des engagements d'assurance devra notamment escompter et mesurer ces engagements en privilégiant des hypothèses « économiques » par rapport aux hypothèses réglementaires privilégiant quant à elle une approche prudentielle. De plus, les comptes consolidés devront être établis en utilisant les mêmes méthodes d'évaluation des passifs d'assurance pour toutes les sociétés du groupe.

La nouvelle norme IFRS contraint les sociétés à publier :

- ✓ dans les états financiers, les montants provenant des contrats d'assurance,
- ✓ les estimations des montants, des échéances et des probabilités associés aux flux futurs générés par les contrats d'assurance,
- ✓ la *fair value* des actifs et passifs correspondant aux contrats d'assurance.

A propos du deuxième point, l'ED 5 est assez précis puisqu'il incite l'assureur à publier :

- ✓ ses objectifs dans la gestion du risque provenant des contrats d'assurance et sa politique pour le réduire,
- ✓ les termes des contrats qui ont une influence conséquente sur le montant, les échéances et l'incertitude associés à ces flux,
- ✓ une information sur les risques d'assurance (bruts et nets de réassurance) comportant notamment :
 - la sensibilité du résultat et des fonds propres aux variables dont elles sont dépendantes,
 - les concentrations conséquentes de risques,
 - l'estimation actuelle des sinistres, qui devra être comparée à celles faites antérieurement⁴,
 - les informations sur les risques de taux et de crédit qu'aurait requises la norme IAS 32 si les contrats d'assurance lui étaient soumis,
 - une information sur les risques importants de taux ou d'évolution des cours pour les dérivés incorporés à des contrats d'assurance si ceux-ci n'ont pas été évalué en *fair value*.

Ces informations seront obtenus grâce à l'utilisation de modèles stochastiques. La partie 5 du présent mémoire est consacrée à la spécification d'une modélisation des placements d'une société d'assurance dans un tel contexte.

⁴ L'assureur n'aura pas à reporter cette information pour des branches d'assurance dont la durée de développement des sinistres ne dépasse que rarement un an.

De manière plus générale, les normes IFRS vont demander une documentation importante des hypothèses et des méthodes retenues pour la valorisation des engagements, cette dernière leur étant très sensible.

2.3. L'IMPACT DES NORMES IFRS SUR LES DOMAINES FONCTIONNELS DE L'ENTREPRISE

La mise en place des IFRS va nécessiter une adaptation des différents domaines de compétence de l'entreprise d'assurance : stratégie, ressources humaines, comptabilité générale, comptabilité technique, actuariat, frais généraux, informatique et gestion financière.

On s'attardera en particulier sur les domaines dans lesquels interviennent les actuaires : l'actuariat, la gestion financière, la comptabilité technique et la comptabilité générale. Pour chacun de ces domaines, on identifiera le périmètre d'impact des normes IFRS et quelles actions l'assureur pourrait être amené à mettre en place dans les prochains mois.

2.3.1. COMPTABILITE GENERALE

Périmètre impacté par les normes IFRS

- ✓ Modification de la présentation et de la périodicité de la publication des comptes
 - Un rapport annuel normalisé
 - Bilan et Compte de Résultat seront plus ou moins développés avec renvoi dans une annexe, qui sera conséquente en informations quantitatives comme qualitatives et qui indiquera les méthodes utilisées.
 - Classement obligatoire des Actifs/Passifs en éléments courants et non courants
 - Objectif : publication trimestrielle des comptes
- ✓ Gestion multi-référentiel : local, IFRS, US GAAP
- ✓ Modification de règles comptables d'évaluation des actifs et des passifs
 - Réévaluation (IAS16) et Dépréciation (IAS36) d'actifs
 - Méthode de valorisation des stocks modifiée (IAS2)
 - Regroupements d'entreprise (IAS22)
 - Consolidation de nouvelles filiales (IAS27)

Exemples d'actions à mener

- ✓ Obligation de retraiter toute acquisition d'entreprise intervenue après 1995 lors de l'établissement des comptes selon les normes IFRS :
 - Evaluation des actifs/passifs de l'entreprise acquise
 - Interdiction d'imputer l'écart d'acquisition sur les capitaux propres
 - Restriction pour la comptabilisation des immobilisations incorporelles acquises
 - Restriction des provisions pour restructuration

- ✓ Suppression des provisions pour grosses réparations.
 - Elles pourront être remplacées par les « coûts d'inspection et de rénovations majeures » des immobilisations corporelles, pouvant être enregistrés à l'actif et amortis.
- ✓ Modification des amortissements des immobilisations de l'entreprise
 - Selon la proposition d'amélioration de l'IAS16, chaque composante d'une immobilisation devrait être différenciée et amortie sur sa propre durée de vie.
- ✓ Retraitement des subventions d'investissement
 - Ils ne devront plus figurer dans les capitaux propres mais en produits à répartir au passif du bilan.

2.3.2. COMPTABILITE TECHNIQUE

Périmètre impacté par les normes IFRS

- ✓ En Assurance Non-vie
 - Les provisions techniques se limiteront aux provisions pour sinistres à payer (frais de gestion futurs inclus) et à la provision pour risques en cours.
 - La notion de rattachement des éléments comptables (sinistres, primes, etc.) à l'exercice de survenance disparaîtra.
 - Les primes non acquises seront reclassées en dettes probables et non plus provisionnées (PPNA).
- ✓ En Assurance Vie
 - Les provisions mathématiques (partie épargne) ne transiteront plus par le résultat, mais seront constatées et demeureront en "en-cours passifs".
 - Les produits techniques et financiers du compte de résultat permettront ainsi de parvenir à une notion de Produit Net Assurantiel.
 - Suppression des frais d'acquisition reportés.
- ✓ En Assurance Vie et Non-vie
 - Suppression des provisions pour égalisation.
 - Notion d'Entity specific Value (ou valeur actuelle des flux futurs propres à l'entreprise). Cette notion sera développée dans la perspective que l'entreprise conserve ses engagements jusqu'au terme, avec prise en compte de la prime de risque liée à la détention des contrats.

Exemple d'action à mener

- ✓ Faire l'inventaire des provisions constituées par l'entreprise puis mesurer l'impact sur leur traitement du passage aux IFRS

2.3.3. ACTUARIAT

Périmètre impacté par les normes IFRS

- ✓ La norme concernant les contrats d'assurance sera publiée ultérieurement à 2005. Elle devrait consister à mesurer la valeur actuelle des actifs et passifs provenant des contrats d'assurance plutôt que la différence entre les recettes et dépenses (on ne reconnaît pas les éléments qui ne sont ni des actifs ni des passifs d'assurance comme les provisions pour catastrophe et d'équilibre ou les revenus de primes reportés).
- ✓ Valorisation à l'actif comme au passif opérée sur une base prospective en recourant à la technique d'actualisation. Les écarts annuels d'actualisation devront transiter par le compte de résultat.
- ✓ Normalisation des contrats d'assurance, au niveau de leur comptabilisation et des informations financières à spécifier.
- ✓ Les actifs et passifs d'assurance devraient être comptabilisés et décomptabilisés selon le critère d'existence de droits et obligations contractuels.

Exemples d'actions à mener

- ✓ Créer de nouveaux outils de valorisation des contrats.
- ✓ L'augmentation des dettes doit se faire en suivant la mesure de la valeur actuelle des flux futurs cash-flows, d'où la nécessité de construire et d'automatiser des modèles mathématiques plutôt que de faire de simples estimations.
- ✓ Développer les contrats d'assurance-vie en unités de compte pour transférer le risque de volatilité sur les clients.

2.3.4. GESTION FINANCIERE

Périmètre impacté par les normes IFRS :

- ✓ Gestion des Placements financiers
 - Calcul de la « juste valeur » (IAS 39) de certains instruments financiers y compris tous les instruments dérivés hors bilan.
- ✓ Modification de l'information financière
 - Informations sectorielles : par secteur d'activité et par zone géographique (IAS 14).
 - Normalisation du contenu du Rapport Annuel (IFRS 1).
 - Augmentation du volume et de la qualité des informations disponibles dans l'annexe au bilan.
 - Résultat par action (de base et dilué).

Exemples d'actions à mener :

- ✓ Créer de nouveaux ratios pour mesurer la performance financière de l'entreprise et sa répartition par métier, pour pouvoir évaluer le retour sur investissement par activité du groupe consolidé.
- ✓ Définir les règles spécifiques à appliquer pour chacune des catégories d'instruments financiers.
- ✓ Répertorier les immeubles de placement, y compris ceux détenus en location-financement, et mettre au point une méthode permettant de déterminer leur *fair value*.
- ✓ Adapter l'information financière aux acteurs externes.

BIBLIOGRAPHIE

DEMERLE E., FELIX J.P., "Méthodes d'évaluation des options contenues dans les contrats d'épargne en euros", séminaire scientifique de l'Institut des Actuaire, 25 février 2003.

DOUARD H., "Normes IAS : Une nouvelle donne comptable pour les sociétés européennes cotées, un enjeu pour les actuaires", *Bulletin Français d'Actuariat*, 4 (8), pp.141-151, 2000.

TORKEN SAS, "IFRS et assureurs : principaux impacts sur les systèmes d'informations", dossier commercial, 2003.

VERON N., "Normalisation comptable internationale : une gouvernance en devenir", complément au rapport du Conseil d'Analyse Economique : *Les normes comptables et le monde post-Enron*, 2003.

ANNEXE 1 : LISTE ET LIENS VERS LES NORMES IAS

- ✓ IAS 1: Presentation of Financial Statements
- ✓ IAS 2: Inventories
- ✓ IAS 7: Cash Flow Statements
- ✓ IAS 8: Net Profit or Loss for the Period, Fundamental Errors and Changes in Accounting Policies
- ✓ IAS 10: Events After the Balance Sheet Date
- ✓ IAS 11: Construction Contracts
- ✓ IAS 12: Income Taxes
- ✓ IAS 14: Segment Reporting
- ✓ IAS 15: Information Reflecting the Effects of Changing Prices

- ✓ IAS 16: Property, Plant and Equipment
- ✓ IAS 17: Leases
- ✓ IAS 18: Revenue
- ✓ IAS 19: Employee Benefits
- ✓ IAS 20: Accounting for Government Grants and Disclosure of Government Assistance
- ✓ IAS 21: The Effects of Changes in Foreign Exchange Rates
- ✓ IAS 22: Business Combinations
- ✓ IAS 23: Borrowing Costs
- ✓ IAS 24: Related Party Disclosures
- ✓ IAS 26: Accounting and Reporting by Retirement Benefit Plans
- ✓ IAS 27: Consolidated Financial Statements
- ✓ IAS 28: Investments in Associates
- ✓ IAS 29: Financial Reporting in Hyperinflationary Economies
- ✓ IAS 30: Disclosures in the Financial Statements of Banks and Similar Financial Institutions
- ✓ IAS 31: Financial Reporting of Interests in Joint Ventures
- ✓ IAS 32: Financial Instruments: Disclosure and Presentation
- ✓ IAS 33: Earnings per Share
- ✓ IAS 34: Interim Financial Reporting
- ✓ IAS 35: Discontinuing Operations
- ✓ IAS 36: Impairment of Assets
- ✓ IAS 37: Provisions, Contingent Liabilities and Contingent Assets
- ✓ IAS 38: Intangible Assets
- ✓ IAS 39: Financial Instruments: Recognition and Measurement
- ✓ IAS 40: Investment Property
- ✓ IAS 41: Agriculture

ANNEXE 2 : PRINCIPAUX ACRONYMES UTILISES

- ✓ ARC : *l'Accounting Regulatory Committee*
- ✓ CNC : *Conseil National de la Comptabilité*
- ✓ DSOP : *Draft Statement of Principles* (published by IASB)
- ✓ ED : *Exposure Draft*
- ✓ EFRAG : *European Financial Reporting Advisory Group*
- ✓ FASB : *Financial Accounting Standards Board*
- ✓ IAS : *International Accounting Standards*
- ✓ IASB : *International Accounting Standards Board*
- ✓ IASC : *International Accounting Standards Committee*
- ✓ IFRIC : *International Financial Reporting Interpretations Committee*
- ✓ IFRS : *International Financial Reporting Standards*
- ✓ SIC : *Standing Interpretations Committee*
- ✓ UE : *Union Européenne*
- ✓ GAAP : *Generally Accepted Accounting Principles*

ANNEXE 3 : TABLEAU RECAPITULATIF DES IAS ET DES SIC RATTACHES

	Libellé français	Libellé anglais		Libellé
IAS 1	Présentation des états financiers	Présentation of Financial Statements	SIC 8	Première application des IAS en tant que référentiel comptable
			SIC 18	Cohérence et permanence des méthodes – Méthodes alternatives
			SIC 29	Informations à fournir – Contrat de délégation de services
IAS 2	Stocks	Inventories	SIC 1	Cohérence des Méthodes – Différentes méthodes de détermination du coût des stocks
IAS 3	<i>Remplacée par IAS 27–IAS 28</i>	<i>Replaced by IAS 27-IAS 28</i>		
IAS 4		Depreciation Accounting		
IAS 5	<i>Remplacée par IAS 1</i>	<i>Replaced by IAS 1</i>		
IAS 6	<i>Remplacée par IAS 15</i>	<i>Replaced by IAS 15</i>		
IAS 7	Tableaux des Flux de Trésorerie	Cash Flow Statements		
IAS 8	Résultat net de l'exercice, erreurs fondamentales et changement de méthodes comptables	Profit or Loss for the Period. Fundamental Errors and Changes in Accounting Policies	SIC 8	Première application des IAS en tant que référentiel comptable
IAS 9		<i>Research and Development Coasts superseded by IAS 38</i>		
IAS 10	Evénements postérieurs à la date de clôture	Events After the Balance Sheet Date		
IAS 11	Contrats de construction	Construction Contracts		
IAS 12	Impôts sur le résultat	Income Taxes	SIC 21	Recouvrement des actifs non amortissables réévalués
			SIC 25	Changement de statut fiscal d'une entreprise ou de ses actionnaires
IAS 13	<i>Remplacée par IAS 1</i>	<i>Replaced by IAS 1</i>		
IAS 14	Information sectorielle	Segment Reporting		
IAS 15	Information reflétant les effets des variations de prix	Information Reflecting the Effects of Prices		
IAS 16	Immobilisations corporelles	Property, Plant and Equipment	SIC 14	Indemnisation liée à la dépréciation ou perte de biens
			SIC 23	Coûts des inspections ou des révisions majeures
IAS 17	Contrats de location	Leases	SIC 15	Avantages dans les contrats de location simple
			SIC 27	Appréciation de la substance sur l'apparence juridique dans les contrats de location
IAS 18	Produits des activités ordinaires	Revenue	SIC 27	Appréciation de la substance sur l'apparence juridique dans les contrats de location
			SIC 31	Traitement comptable des opérations de troc de services publicitaires
IAS 19	Avantages du personnel	Employee Benefits		
IAS 20	Comptabilisation des subventions publiques et informations à fournir sur l'aide publique	Accounting for Government Grants and Disclosure of Government Assistance	SIC 10	Aide publique – Absence de relations spécifiques avec des activités opérationnelles
IAS 21	Effets des variations des cours des monnaies étrangères	The effects of Changes in Foreign Exchange Rates	SIC 7	Introduction de l'Euro
			SIC 11	Opération de change – Incorporation des pertes consécutives à une forte dévaluation monétaire dans le coût des actifs
			SIC 19	Monnaie de présentation : Evaluation et présentation des états financiers selon IAS21 et IAS29
IAS 22	Regroupements d'entreprises	Business Combinations	SIC 9	Classification en acquisitions ou en mises en commun

			SIC 22	Ajustements ultérieurs des justes valeurs et du goodwill présentés initialement
			SIC 28	« Date d'échange » et juste valeur des instruments financiers
IAS 23	Coût d'emprunt	Borrowing Costs	SIC 2	Cohérence des méthodes – Incorporation des coûts d'emprunt dans le coût des actifs
IAS 24	Informations relatives aux parties liées	Related party Disclosures		
IAS 25		Accounting for Investments		
IAS 26	Comptabilité et rapports financiers des régimes de retraite	Accounting and Reporting by Retirement Benefit Plans		
IAS 27	Etats financiers consolidés et comptabilisation des participations dans les filiales	Consolidated Financial Statements and accounting for Investments in Subsidiaries	SIC 12	Consolidation – Entités ad hoc
			SIC 33	Consolidation et mise en équivalence – Droits de vote potentiels et allocation des parts d'intérêts
IAS 28	Comptabilisation des participations dans les entreprises associées	Accounting for Investments in Associates	SIC 3	Elimination des profits et des pertes latents résultant de transactions avec des entreprises associées
			SIC 20	Méthode de la mise en équivalence – Comptabilisation des pertes
			SIC 33	Consolidation et mise en équivalence – Droits de vote potentiels et allocation des parts d'intérêts
IAS 29	Information financière dans les économies hyper inflationnistes	Financial Reporting in Hyperinflationary Economies	SIC 19	Monnaie de présentation – Evaluation et présentation des états financiers selon IAS21 et IAS29
			SIC 30	Traduction des éléments des états financiers de la monnaie d'évaluation en monnaie de présentation
IAS 30	Informations à fournir dans les états financiers des banques et des institutions financières assimilées	Financial Statements of Banks and Financial Institutions		
IAS 31	Information financière relative aux participations dans des coentreprises	Financial Reporting of Interests in Joint Ventures	SIC 13	Entités contrôlées conjointement – Apports non monétaires par des co-entrepreneurs
IAS 32	Instruments financiers	Financial Instruments : Disclosures Presentation	SIC 5	Classification des instruments financiers – clauses conditionnelles de règlement
			SIC 16	Capital social – Propres instruments de capitaux propres rachetés (actions propres)
			SIC 17	Capitaux Propres – Coûts d'une transaction portant sur les capitaux
IAS 33	Résultat par action	Earnings Pershare	SIC 24	Instruments financiers et autres contrats livrables en actions
IAS 34	Information financière intermédiaire	Interim Financial Reporting		
IAS 35	Abandon d'activité	Discontinuing Operations		
IAS 36	Dépréciation d'actifs	Impairment of Assets		
IAS 37	Provisions, Passifs et actifs éventuels	Provisions, Contingent Liabilities and Assets		
IAS 38	Immobilisations incorporelles	Intangible Assets	SIC 6	Coûts de modification de logiciels existants
			SIC 32	Immobilisations incorporelles – Coûts des sites internet
IAS 39	Instruments financiers : comptabilisation et évaluation	Financial Instruments : Recognition and Measurement	SIC 33	Consolidation et mise en équivalence – Droits de vote potentiels et allocation des parts d'intérêts
IAS 40	Immeubles de placements	Financial Property		
IAS 41	Agriculture			

L'application des normes IFRS va constituer un important défi à relever pour les entreprises d'assurance françaises puisqu'elles imposent des méthodes d'évaluation financières dont celles-ci ne sont pas toujours familières.

Le document présenté ci-après a été rédigé pour servir de support à une formation, dans une société d'assurance, sur l'évaluation des engagements dans le cadre des normes IFRS. Il a pour objectif de présenter les principaux résultats de la finance moderne utiles dans ce contexte puis de les appliquer à une problématique assurantielle.

Il se présente en trois parties :

- ✓ Dans la première, on trouvera une présentation de la problématique de l'assureur quant à l'évaluation du surplus engendré par un contrat d'assurance. Le surplus correspondant à la valeur du contrat du point de vue de la compagnie.
- ✓ Les résultats fondamentaux de la finance, découlant de l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, sont rappelés dans la deuxième partie.
- ✓ Une application de ces théorèmes constitue la troisième partie par le biais de l'évaluation en *fair value* d'un contrat d'épargne en euro simplifié. Ce contrat est initialement un contrat à taux garanti auquel on rajoute une clause de participation aux bénéfices à l'échéance puis une clause de rachat anticipé. Cette section met en évidence la nature « optionnelle » de certaines clauses rencontrées dans ce type de contrat.

L'UTILISATION DE METHODES DE VALORISATION FINANCIERES EN ASSURANCE

Support de formation

Frédéric PLANCHET

Pierre THEROND

1. Le contexte classique d'évaluation actuarielle.....	22
1.1. Position du problème.....	22
1.2. Analyse du surplus	22
2. Les méthodes issues de la théorie de l'équilibre général.....	23
2.1. Introduction	23
2.2. Portefeuille d'arbitrage autofinancé	23
2.3. Probabilité risque-neutre	24
2.4. Changement de numéraire.....	26
2.5. Changement de temps	26
3. Lecture optionnelle des contrats d'assurance vie.....	28
3.1. Contrat à taux garanti, sans participation aux bénéfices, ni clause de rachat	28
3.2. Contrat à taux garanti avec participation aux bénéfices, sans clause de rachat	31
3.3. Contrat à taux garanti avec clause de rachat	31
Glossaire.....	36

1. LE CONTEXTE CLASSIQUE D'EVALUATION ACTUARIELLE

1.1. POSITION DU PROBLEME

En assurance vie, à chaque date, on est amené à déterminer les valeurs de 3 séquences de flux:

- les primes,
- les prestations,
- les revenus du portefeuille.

Si on désigne par X , Y et Z respectivement ces suites de flux, et si V désigne le mécanisme permettant d'associer à une suite de flux futurs son "équivalent capital" actuel, on a donc :

- $A(t)=V(t, Z)$ la valeur du portefeuille financier
- $V(t)=V(t, Y-X)$ la valeur nette du contrat.

La différence $S = A - V$ est par définition le surplus à la date t .

1.2. ANALYSE DU SURPLUS

Une décomposition classique du surplus consiste à l'écrire sous la forme $S=M+E$, avec, si R désigne le montant des provisions:

- $M(t)=A(t)-R(t)$
- $E(t)=R(t)-V(t)$

E est la "VBIF" (Value of Business In Force).

La décomposition présentée ci-dessus coïncide avec la séparation entre les services actuariels et financiers: typiquement A est valorisé selon des méthodes d'inspiration financières (prix de marché et modélisation ad hoc), alors que E est valorisé avec des techniques actuarielles classiques, basées sur l'actualisation de l'espérance des flux futurs.

On voit que cela peut engendrer des incohérences, spécialement lorsque X et Y sont liés à Z (par exemple dans des contrats d'épargne) ou que les contrats contiennent des "options cachées".

L'idée est alors de rechercher des méthodes de valorisation cohérentes pour les aspects actuariels et financiers : on va utiliser pour cela des instruments de la théorie économique classique, notamment les notions de prix d'équilibre dans un marché complet et d'absence d'opportunité d'arbitrage.

2. LES METHODES ISSUES DE LA THEORIE DE L'EQUILIBRE GENERAL

2.1. INTRODUCTION

La notion centrale qui sous-tend les méthodes de valorisation en « juste valeur » est l'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA).

Les travaux de HARRISSON et KREPS (1979) et HARRISON et PLISKA (1981) ont montré que, sous l'hypothèse de marché complet et d'AOA, il existe une mesure de probabilité équivalente à la probabilité historique telle que les prix actualisés soient, sous cette probabilité, des martingales.

Ce résultat ramène le calcul du prix d'un actif à un calcul d'espérance.

Plus généralement on notera qu'actualiser les prix au taux sans risque revient à changer de numéraire : au lieu d'exprimer la valeur d'un actif en unité monétaire courante, on l'exprime dans une unité particulière, constituée par un bon de capitalisation au taux sans risque. Cette approche a été généralisée par GEMAN, EL KAROUI et ROCHET (1995) qui montrent qu'on peut associer à tout numéraire (processus mesurable strictement positif) une mesure de probabilité sous laquelle les prix des actifs sont des martingales.

Dans la suite de ce paragraphe, on illustre les concepts introduits ci-dessus dans le cas classique de l'évaluation d'une option d'achat européenne avec un sous-jacent modélisé par un brownien géométrique.

On considère donc un sous-jacent dont la dynamique dans l'univers historique est définie par l'EDS

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dz$$

Le taux d'intérêt sans risque instantané $r(t)$ est supposé constant égal à r . On s'intéresse à la valorisation d'une option d'achat européenne de prix d'exercice K et de maturité T , le flux à l'échéance étant défini par :

$$C_T = [S_T - K]^+$$

2.2. PORTEFEUILLE D'ARBITRAGE AUTOFINANCE¹

L'idée est de construire un portefeuille autofinancé répliquant les flux d'un placement sans risque ; la valeur d'un portefeuille composé de $n(t)$ options et $q(t)$ actions s'écrit :

$$V_t = n(t)C_t + q(t)S_t$$

¹ cf. HULL J. C., *Options, Futures & Other Derivatives*, Prentice-Hall, 4^{ème} édition, 1999.

La propriété de Markov pour les diffusions assure que le prix de l'option C ne dépend de la valeur du sous-jacent qu'au travers de S_t , et la formule d'Itô implique alors :

$$dC = \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} dt + \frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{\partial C}{\partial t} dt$$

Le choix de $n = -1$ et $q = \frac{\partial C}{\partial S}$ annule dans l'expression de dV le terme aléatoire (en dz), ce qui indique que le portefeuille est alors sans risque. Par la condition d'AOA, il doit avoir le rendement du sans-risque, ce qui conduit à $dV = rV dt$.

On obtient donc l'EDP de Black et Scholes que doit satisfaire le prix de l'option :

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC + \frac{\partial C}{\partial t} = 0$$

avec la condition limite : $C(S_T, T) = [S_T - K]^+$

La résolution de l'équation ci-dessus n'est pas simple : elle nécessite un changement de variable peu intuitif (cf. BLACK et SCHOLES (1973)) qui permet de la ramener à l'équation de conservation de la chaleur. L'idée est alors de rechercher une méthode « probabiliste » pour résoudre le problème de valorisation.

2.3. PROBABILITE RISQUE-NEUTRE

La modélisation mise en œuvre fait appel à des processus de diffusion, et ceux-ci ont une propriété remarquable, l'existence d'une probabilité sous laquelle ils deviennent des martingales ; c'est ce qu'exprime le théorème de Girsanov, que l'on peut énoncer de la manière suivante :

Théorème de Girsanov²

Soient Z un mouvement brownien pour un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ et λ un processus adapté vérifiant $E \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T \lambda^2(u) du \right\} \right] < \infty$ (condition de Novikov).

On définit le processus Z' et la mesure Q par :

$$Z'_t = Z_t + \int_0^t \lambda(s) ds \text{ et } \frac{dQ}{dP} = \exp \left\{ - \int_0^t \lambda(u) dZ_u - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda^2(u) du \right\}$$

Alors Z' est un Q -mouvement brownien.

² cf. LAMBERTON D., LAPEYRE B., *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, 2nd édition, ellipses, 1997.

En appliquant ce résultat avec $\lambda = (\mu - r)/\sigma$, et en appliquant le lemme d'Itô au processus de prix actualisé $S'(t) = S(t) * \exp(-rt)$, on obtient que S' est une martingale sous Q . De même $C' = C(t) * \exp(-rt)$ est une Q -martingale, ce qui permet de conclure que :

$$\exp(-rt) * C(t) = E_Q[\exp(-rT) * [S_T - K]^+ | F_t]$$

On a ainsi ramené le problème de la valorisation de l'option à un calcul d'espérance, a priori plus simple que la résolution de l'EDP issue du raisonnement d'arbitrage direct.

En effet, la variable $S'(T)$ est log-normale sous Q , ce qui conduit aisément à la formule de Black et Scholes³ :

$$C(t) = S_0 * N(d_1) - K * e^{-rT} * N(d_2)$$

Avec

$$d_1 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r - \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

N désignant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Les deux approches sont liées par le théorème de représentation de Feynman-Kac qui permet d'exprimer la solution de certaines équations différentielles stochastiques (e.d.s.) sous la forme d'un calcul d'espérance et réciproquement.

Théorème de Feynman-Kac⁴

Soit f une fonction de classe $C^{2,1}$. Si $\mu(x,t)$, $\sigma(x,t)$ et $r(x,t)$ sont deux fonctions lipschitziennes, bornées sur $\mathcal{R} \times [0, T]$. Considérons l'EDP :

$$\frac{1}{2} \sigma^2(x,t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \mu(x,t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} + r(x,t)f = 0$$

avec la condition limite : $f(x, T) = \Phi(x)$

³ cf. HULL J. C., *Options, Futures & Other Derivatives*, Prentice-Hall, 4^{ème} édition, 1999.

⁴ cf. KARATZAS I., SHREVE S.E., *Brownian motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, 1988.

En supposant que, $\forall t \leq T$,
$$\int_0^t E \left[\left(\sigma(x(s), s) \frac{\partial f}{\partial x}(x(s), s) \right)^2 \right] ds < \infty$$

alors :

$$f(x, t) = E_N \left[\exp \left\{ \int_t^T r(x, s) ds \Phi(X(T)) \right\} \right]$$

où X suit l'e.d.s. $dX_t = \mu(X, t) * dt + \sigma(X, t) * d\hat{z}$
et \hat{z} est un mouvement brownien pour la mesure N .

2.4. CHANGEMENT DE NUMERAIRE

Cette méthode due à GEMAN, EL KAROUI et ROCHET (1995) est très efficace pour évaluer les prix de produits dérivés.

Théorème d'évaluation par changement de numéraire

Soit Q la probabilité risque-neutre. Etant donnée un nouveau numéraire X tels que $X(t) * \exp \left\{ \int_0^t r(u) du \right\}$ est une Q -martingale.

Il existe une mesure de probabilité Q_X sur F sous laquelle les actifs financiers de base exprimés dans ce nouveau numéraire, sont des martingales, qui est défini par la densité de Radon-Nikodym :

$$\frac{dQ_X}{dQ} \Big|_{F_T} = \frac{X(T)}{X(0)P(T)}$$

La valeur d'équilibre $f(S, t)$ de l'actif dérivé de cours S , de payoff $H(T)$ en T s'écrit alors :

$$f(S, t) = X(t) E_{Q_X} \left[\frac{H(T)}{X(T)} \Big|_{F_t} \right]$$

2.5. CHANGEMENT DE TEMPS

Ce théorème va intervenir notamment dans l'évaluation du prix d'une option lorsque la structure par terme des taux d'intérêt est stochastique et plus généralement lorsque plus d'un mouvement brownien est en jeu. En effet ce changement de temps va nous permettre, à partir d'une martingale dont la dynamique est régie par deux browniens, de se ramener à un seul brownien.

Considérons la martingale M définie par l'e.d.s. :

$$dM = x_1(t) dz_1 + x_2(t) dz_2$$

où x_1 et x_2 sont déterministes et z_1 et z_2 sont deux browniens indépendants.

Posons
$$\tau(t) = \int_0^t (x_1^2(u) + x_2^2(u)) du$$

Théorème de changement de temps

Si τ est strictement croissante, alors il existe un unique mouvement brownien B tel que l'on puisse écrire :

$$M(t) = M(0) + B(\tau(t))$$

et alors :

$$M(t) = M(0) * \exp \left\{ B(\tau) - \frac{1}{2} \tau \right\}$$

On trouvera dans QUITTARD-PINON (2002) une démonstration de ce résultat.

3. LECTURE OPTIONNELLE DES CONTRATS D'ASSURANCE VIE

Après avoir rappelé dans la section précédente les outils utilisés, l'objectif de la présente section est de fournir une illustration des méthodes de calculs issues de la finance dans un cas concret, celui des contrat d'assurance vie de type « contrat d'épargne ».

En effet, de nombreuses clauses rattachées aux contrats d'assurance vie, telles que la clause permettant le rachat du contrat, l'obligation de rémunérer un contrat libellé en euro à un taux minimum ou la participation aux bénéfices, peuvent être interprétées comme des options. On trouvera dans MERLUS et PEQUEUX (2002) une typologie de ces différentes garanties. Ces options ont un coût pour l'entreprise que la réglementation actuelle n'oblige pas à prendre en compte. De ce fait, les sociétés d'assurance vie sont confrontées à l'identification et l'évaluation des ces options en vue de déterminer la juste valeur de leurs engagements.

Dans ce paragraphe, nous considérerons une société anonyme d'assurance vie et nous verrons les conséquences des engagements de celle-ci sur les assurés et les actionnaires. On rappelle la disposition réglementaire selon laquelle, si le montant des fonds propres de la société passe en dessous de 50% de son capital social, l'assemblée générale des actionnaires peut décider de la liquidation de la compagnie ou de la poursuite de l'activité. Dans ce dernier cas, le capital social devra être reconstitué dans les deux années suivantes.

Nous considérerons dans ce paragraphe que les hypothèses classiques assurant les conditions d'AOA sont vérifiées, et en particulier que le marché est parfait*.

3.1. CONTRAT A TAUX GARANTI, SANS PARTICIPATION AUX BENEFICES, NI CLAUSE DE RACHAT

Notations

S_t la valeur de l'actif à l'instant t

K_t la valeur des fonds propres en t

PM_t la valeur des provisions mathématiques en t

$P(t,T)$ le prix en t d'un zéro-coupon sans risque d'échéance T

Π le montant de la prime unique demandée aux assurés en 0.

Supposons que la société émette un contrat d'épargne de n années dont le prix initial est S_0 . Imaginons que son seul engagement soit de garantir aux assurés au taux r_g (*i.e.* pas de participation aux bénéfices, ni de clause de rachat pour l'instant). Pendant les n années, la société investit son capital et ses provisions sur le marché.

Bilan en 0

ACTIF	PASSIF
S_0	K_0
	$PM_0 = P(0,T) * (1+r_g)^T * \Pi$

Bilan en T

ACTIF	PASSIF
S_T	K_T
	$PM_T = (1+r_g)^T * \Pi$

Date	Flux des assurés	Flux des actionnaires
0	- Π	- K_0
T	$\text{Min} (PM_T, S_T)$	$[S_T - PM_T]^+$

A la date de signature du contrat, on connaît déjà PM_T , la seule variable inconnue est la valeur finale des placements S_T dont on va déduire K_T .

Observons le flux de trésorerie en T des assurés :

$$\text{Min} (PM_T, S_T) = PM_T + S_T - \text{Max} (PM_T, S_T)$$

$$\text{Min} (PM_T, S_T) = PM_T - (PM_T - S_T)^+$$

Ce flux est celui d'une obligation zéro-coupon, sans risque de défaut, d'échéance T et de la vente d'un Put européen de sous-jacent S, de prix d'exercice PM_T et d'échéance T.

De même le flux à l'échéance des actionnaires correspond à celui d'un Call européen de sous-jacent S, de prix d'exercice PM_T et d'échéance T.

Conséquences de l'absence d'opportunité d'arbitrage :

- ✓ Il existe une probabilité Q dite risque-neutre, sous laquelle les prix actualisés sont des martingales.
- ✓ Du point de vue de l'assuré, le fait qu'il n'y ait pas d'opportunité d'arbitrage signifie que payer Π en 0 pour souscrire le contrat lui laisse espérer le même rendement à terme que de prêter Π au taux sans risque.

i.e.

$$\Pi * e^{r^*T} = E_Q [PM_T - (PM_T - S_T)^+]$$

$$\Pi = e^{-r^*T} * PM_T - e^{-r^*T} * E_Q [(PM_T - S_T)^+]$$

- ✓ De même du point de vue de l'actionnaire :

$$K_0 = e^{-r^*T} * E_Q [(S_T - PM_T)^+]^5$$

r est le taux d'intérêt instantané sans risque.

Sous l'hypothèse de Black et Scholes, selon laquelle la valeur des placements suit un mouvement brownien géométrique :

⁵ Le législateur impose aux sociétés d'assurance de disposer d'un capital social minimum fixé réglementairement. On n'en tient pas compte ici. K_0 désignant le capital économique nécessaire à la société pour commercialiser ce type de contrat.

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu^* dt + \sigma^* dz$$

où z est un mouvement brownien standard, on obtient les valeurs de Π et de K_0 :

$$K_0 = S_0 N(d_1) - PM_T e^{-rT} N(d_2)$$

$$\Pi = PM_T e^{-rT} (1 - N(d_2)) + S_0 N(-d_1)$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln(S_0 / PM_T) + (r + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0 / PM_T) + (r - \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

N désignant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Conclusion

Ce contrat peut être décomposé en :

- ✓ Une obligation zéro-coupon sans risque émise
- ✓ Un Call européen détenu par les actionnaires sur les actifs de la société
- ✓ Un Put européen vendu par les assurés sur les actifs de la société.

On peut aussi analyser les flux du point de vue de l'entreprise. En effet la vente de ce contrat en 0, revient pour l'entreprise à :

- ✓ vendre le Call aux actionnaires
- ✓ acheter le Put aux assurés
- ✓ acheter le sous-jacent S sur le marché
- ✓ vendre aux assurés le zéro-coupon sans risque d'échéance T .

La relation de parité Put-Call nous permet de vérifier que la vente du Call et du zéro-coupon lui permet l'achat de l'actif S et du Put.

$$C + K^*e^{-r^*T} = P + S$$

3.2. CONTRAT A TAUX GARANTI AVEC PARTICIPATION AUX BENEFICES, SANS CLAUSE DE RACHAT

Au contrat présenté précédemment, la société a rajouté une clause de participation aux bénéfices de b . On rappelle que le législateur oblige les sociétés d'assurance à faire participer aux bénéfices les assurés à un taux supérieur à 85%. Cette participation aux bénéfices intervient à l'échéance du contrat.

On va donc retrouver les flux suivants :

Date	Flux des assurés	Flux des actionnaires
0	$-\Pi$	$-K_0$
T	$\text{Min}(PM_T, S_T) + b * [S_T - PM_T]^+$	$(1-b) * [S_T - PM_T]^+$

Le Call qui dans le contrat précédent était détenu par les actionnaires est à présent partagé entre les actionnaires et les assurés.

3.3. CONTRAT A TAUX GARANTI AVEC CLAUSE DE RACHAT

La clause de rachat permet aux assurés de demander, à tout instant, le remboursement de la provision mathématique constituée. Nous considérerons ici qu'il n'y a pas de participation aux bénéfices, ni de pénalité en cas de rachat. Le rachat aura lieu en cas de hausse des taux significative et durable permettant à l'assuré de saisir une opportunité d'arbitrage. Le rachat aura aussi lieu lorsque le souscripteur du contrat décède.

La possibilité de racheter le contrat à tout instant t ($0 < t < T$) s'apparente à un Put américain dont le sous-jacent est le contrat et le prix d'exercice le minimum entre la valeur de l'actif en t et le montant de la provision mathématique à la date de l'exercice de l'option. Toutefois, il nous faut remarquer qu'à la signature du contrat, on ne connaît pas le futur prix d'exercice, puisque S est une variable aléatoire.

Bilan en t	
ACTIF	PASSIF
S_t	K_t
	$PM_t = P(t, T) * (1+r_g)^T * \Pi$

Il y a rachat en t si :

$$u \{ \text{Min}(PM_t, S_t) * e^{r(T-t)} \} > E [u \{ \text{Min}(PM_T, S_T) \} | F_t]$$

où

F_t représente toute l'information disponible en t ; u est la fonction d'utilité⁶ de l'assuré.

La clause de rachat, on rappelle qu'elle est obligatoire, a un coût non négligeable pour l'assureur comme l'illustre l'exemple suivant :

Exemple

L'assureur garantit un taux minimum de 3% par an. Le contrat a une durée de 8 ans. La prime demandée à l'assuré en 0 s'élève à 100. Les fonds propres de la société sont de 20. Supposons enfin qu'en 0, le taux sans risque à 8 ans soit de 3%.

L'assureur cherche à immuniser son portefeuille à l'horizon de 8 ans et achète des zéro-coupons sans risque d'échéance 8 ans avec la prime reçue.

Le prix , en 0, d'un zéro-coupon versant 1 dans 8 ans est :

$$P(0,8) = \frac{1}{(1 + 3\%)^8} = 0.7894$$

Bilan en 0

ACTIF	PASSIF
Placement des fonds propres : 20	Fonds propres 20
Zéro-coupons (126.68×0.7894) 100	Provisions 100

Au bout de 2 ans de vie du contrat, la courbe des taux a évolué et le taux sans risque à 6 ans est de 5%. Il y a une opportunité d'arbitrage pour les assurés, puisque s'ils investissent sur le marché obligataire, ils seront mieux servis que s'ils continuent leur contrat jusqu'à l'échéance. Ils exercent donc leur clause de rachat et la société leur verse le montant de la provision associée au contrat :

$$PM(2) = (1 + 3\%)^2 * 100 = 106.09$$

Or la valeur des zéro-coupons achetés en 0 est significativement réduite du fait de la hausse des taux, ils valent en 2 :

$$\text{Zéro - coupons}(2) = 126.68 * \frac{1}{(1 + 5\%)^6} = 94.53$$

L'assureur doit donc puiser dans ses fonds propres pour honorer ses engagements.

Cet exemple nous montre qu'il est indispensable pour l'assureur d'évaluer les impacts financiers de la clause de rachat.

Evaluation

⁶ On rappelle les propriétés suivantes concernant les fonctions d'utilité :

- ✓ u est une fonction croissante de la richesse
- ✓ u est concave : l'utilité marginale est décroissante de la richesse.

La méthode d'évaluation présentée *infra* provient de PRUDENT (1996).

Nous considérerons un contrat de capitalisation de taux garanti r_g , de prime unique Π versée en 0 et d'échéance T . En cas de sortie anticipée en t , l'assureur verse au détenteur du contrat le capital et les intérêts capitalisés jusqu'en t . Nous supposons que l'assuré a un horizon de gestion de durée la durée du contrat.

On notera dans la suite $F(t)$ le flux associé à l'option de rachat anticipé lorsqu'elle est exercée en t . Le flux associé à l'exercice de l'option de rachat est égal à la valeur de rachat du contrat diminuée de la valeur de marché du contrat. De plus, nous supposons que le montant des fonds propres est élevé de sorte que la valeur de l'actif soit toujours supérieure à celle des engagements techniques.

Etape 1 : Détermination du flux associé à l'exercice de l'option de rachat

$$F(t) = PM_t - E_Q[PM_T * P(t, T) | F_t]$$

où Q est la probabilité risque-neutre.

L'exercice de l'option de rachat à la date t est rationnel dès lors que $F(t) > 0$.

Vu en 0, le rachat aura lieu à une date aléatoire τ ou n'aura pas lieu. On notera ORA la valeur de l'option de rachat en 0. On remarque que τ est un temps d'arrêt par rapport à la filtration F .

$$ORA = E_Q[F(\tau) * B(\tau) | F_0]$$

$$ORA = E_Q[(PM_\tau - E_Q[PM_T * P(\tau, T) | F_\tau]) * B(\tau) | F_0]$$

or,

$$P(\tau, T) * B(\tau) = B(T)$$

donc,

$$ORA = E_Q[PM_\tau * B(\tau) - PM_T * B(T) | F_0]$$

puisque $F_0 \subset F_\tau$ ($\tau > 0$).

Etape 2 : Décomposition de l'option de type américain en somme d'options européennes

Pour évaluer cette option de type américaine, nous allons, dans un premier temps, la décomposer en options européennes de dates d'exercice $t \in [0, T]$. L'exercice d'une de ces options européennes s'accompagne de l'abandon de celles dont l'échéance est postérieure. On peut donc écrire :

$$ORA = \int E_Q[X(\tau) | \tau = t] dP_\tau(t)$$

où $X(t) = F(t) * B(t)$.

D'après le théorème de Fubini,

$$ORA = E_Q \left[\int X(t) dP_\tau(t) \right]$$

donc,

$$ORA = E_Q \left[\int (PM_t * B(t) - PM_T * B(T)) dP_\tau(t) \right]$$

Nous verrons dans la suite (étape 5) comment estimer $P(\tau = t)$ ou modéliser la loi du temps d'arrêt τ .

Etape 3 : Détermination d'une formule probabiliste du prix de l'option dans l'univers forward-neutre

Notons Q_t la probabilité forward-neutre relative à l'instant t . On rappelle que cette probabilité est équivalente à la probabilité risque-neutre Q .

$$\frac{dQ_t}{dQ} = \frac{\exp\left(-\int_0^t r(s) ds\right)}{B(t)}$$

et,

$$E_Q \left[\frac{dQ_t}{dQ} * P_t \right] = E_Q \left[\frac{dQ_t}{dQ} \right] * E_{Q_t} [P_t]$$

On a alors :

$$ORA = \int_0^T (PM_t * B(t) * E_{Q_t} [P_t] - PM_T * B(T) * E_{Q_T} [P_t]) dt$$

A présent nous allons modéliser un certain nombre de paramètres afin de pouvoir établir des formules analytiques de la valeur de l'option de rachat.

Etape 4 : Modélisation de la dynamique des zéro-coupons

Nous allons utiliser le modèle de COX, INGERSOLL et ROSS (CIR) pour la dynamique du taux court terme r . Ce modèle, en racine carrée, contient un retour à une moyenne long terme et ne peut conduire à des taux négatifs.

$$dr = a(b - r) dt + \sigma \sqrt{r} dZ$$

Sous ce modèle, les zéro-coupons ont la forme suivante :

$$P(t, T) = A(t, T) * e^{-B(t, T)r}$$

où,

$$B(t, T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma + a)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}$$

$$A(t, T) = \left[\frac{2\gamma e^{(a+\gamma)(T-t)/2}}{(\gamma + a)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right]^{2ab/\sigma^2}$$

$$\gamma = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$$

Etape 5 : Modélisation du comportement du souscripteur vis à vis de l'option de rachat

Pour obtenir une formule analytique de la valeur de l'option de rachat, il nous faut modéliser la loi de la variable aléatoire τ . Il s'agit en fait de modéliser le comportement des souscripteurs de contrat. Nous proposons ici deux modèles. Le premier est entièrement fondé sur les données historiques et ne tient pas compte du contexte économique (fluctuations de la courbe des taux, inflation, etc.) ni de la situation personnelle de l'assuré (âge). Le deuxième tiendra compte d'un certain nombre de variables extérieures au contrat.

✓ Premier modèle

Ce modèle se fonde sur les données historiques des dates d'exercice de clause de rachat. L'objectif est d'obtenir des taux instantanés de rachat v_t . Le taux de rachat à la date t représentant le rapport entre le nombre de contrats rachetés à la date t et de ceux non encore rachetés juste avant cette date. Les données dont on dispose sont, par essence, discrètes (annuelles ou mensuelles) il va donc falloir les transformer en variables continues.

On pourra alors estimer $dP_\tau(t)$ par $P_t * dt$, avec :

$$P_t = v_t * \exp\left(-\int_0^t v_s ds\right)$$

✓ Deuxième modèle

L'idée est d'exprimer le taux de rachat comme une fonction de variables explicatives observables influençant les souscripteurs dans leur décision de rachat. Considérons un modèle à une variable explicative $X(t)$ et une relation fonctionnelle f telle que :

$$v_t = f[X(t)]$$

Le souscripteur a un horizon d'investissement limité à T années donc le souscripteur effectue le rachat du contrat à la date t si le gain procuré par ce rachat est supérieur à la valeur de marché du contrat conservé jusqu'à son échéance T .

Donc

$$X(t) = \frac{PM_t * \beta_t}{PM_T * P(t, T)}$$

où β_t représente l'effet cumulé des taxes, pénalités et droits d'entrée (supposés nuls jusqu'à présent)

Dès lors que $X(t) > 1$, le souscripteur a intérêt à racheter son contrat. Par conséquent le taux de rachat instantané devra être une fonction croissante de $X(t)$.

Choisissons pour f une forme log-linéaire du type :

$$f(x) = -\ln(A) + p \ln(x)$$

où A et p sont des constantes telles que $0 < A < 1$ et $p > 0$. Alors :

$$v_t = -\ln(A) + p \ln(X(t))$$

Avec un choix approprié des paramètres A et p (déterminé par régression sur les données historiques par exemple), les valeurs obtenues pour le taux de rachat sont réalistes. Le coefficient A représente la proportion des souscripteurs qui gardent leur contrat lorsqu'il est équivalent de le racheter ou de le garder ; p représente la sensibilité croissante des souscripteurs à l'évolution des taux.

Dans un modèle plus élaboré, on pourra choisir A et p en fonction de diverses variables, l'âge du souscripteur par exemple. En effet plus l'âge sera avancé, plus on choisira A petit car la probabilité de rachat « non volontaire » (dû au décès) augmente indépendamment de l'évolution des taux.

Conclusion

Cette méthode nous permet d'évaluer le prix de la clause de rachat d'un contrat d'épargne via une formule analytique si l'on a décidé de modéliser les taux d'intérêt et le comportement des souscripteurs face à l'exercice de l'option de rachat.

De nombreux autres choix sont possibles que ce soit pour modéliser la structure des taux d'intérêt ou pour modéliser le comportement des souscripteurs de contrat. Ces modèles ne permettent pas tous d'aboutir à une formule analytique pour la valeur de l'option de rachat. On aura alors recours à des techniques de simulation pour évaluer le prix de la clause de rachat.

GLOSSAIRE

Fair value ou juste valeur

Montant pour lequel un actif pourrait être échangé, ou un passif réglé, entre des parties bien informées et consentantes dans le cadre d'une transaction effectuée dans des conditions de concurrence normale.

IAS 39 (Financial Instruments : Recognition and Measurement)

Norme établie par l'IASB qui définit un instrument financier comme « un contrat qui donne lieu à la fois à un actif financier pour une entreprise et à un passif financier ou à un instrument de capitaux propres pour une autre. ». Cette norme prévoit l'évaluation en juste valeur des produits dérivés et de certains actifs financiers.

Marché parfait

Cadre idéalisé d'un marché. Les titres sont parfaitement divisibles et les ventes à découvert permises. Les opérateurs sont rationnels et disposent de la même capacité à traiter l'information. Ils ne peuvent, par une action individuelle, faire bouger les prix. Il n'y a pas de barrière aux emprunts. Les taux de prêt et d'emprunt sont identiques. Il n'y a pas de frais de transaction ni de fiscalité.

Cette partie est consacrée à un article qui a été soumis à la revue *Finance*. Cette revue, publiée par l'*Association Française de Finance* (AFFI), est destinée à des financiers, qu'ils soient universitaires ou travaillent dans des sociétés privées.

L'objectif de cet article est de présenter à des financiers les problématiques auxquelles se trouvent confrontés les assureurs, que ce soit dans le cadre de leurs allocations stratégiques ou dans celui de l'évaluation d'options cachées dans les contrats d'assurance vie.

Cet article illustre notamment les techniques exposées précédemment dans le cadre de la valorisation d'un contrat d'épargne.

Ainsi après avoir présenté le contexte économique et réglementaire de l'assurance en France, nous présentons les différents types de modèles développés par les assureurs pour résoudre le problème du choix de portefeuille. La dernière partie est consacrée à une illustration de l'allocation d'actifs et à l'évaluation financière d'un contrat d'assurance par le biais de simulations.

Notons que les développements sur ce dernier sujet sont nombreux depuis les travaux de BRENNAN et SCHWARTZ (1976). On remarquera néanmoins, qu'à notre connaissance, aucune étude n'a proposé l'évaluation d'un contrat « complet » à la française, *i.e.* un contrat d'épargne à taux garanti, avec participation aux bénéfices annuelle, clause de rachat anticipé, primes périodiques et prise en compte de la mortalité.

Des travaux ayant été mis en œuvre sur ces différentes clauses, il est possible d'estimer par des techniques de simulations de tels contrats.

Un autre sujet d'actualité concerne l'allocation d'actifs d'un régime de rentes. En effet, le Loi Fillon va obliger la gestion cantonnée des actifs d'un Plan d'Epargne Individuelle pour la Retraite (PEIR) d'où l'intérêt de développer des modèles d'allocation stratégique pour de tels régimes. Un exemple simple d'allocation sur un portefeuille de rentiers est présenté.

METHODES FINANCIERES ET ALLOCATION D'ACTIFS EN ASSURANCE

Financial Methods and Asset Management in Insurance

Norbert GAUTRON

JWA – Actuaires[†]

Frédéric PLANCHET

Laboratoire SAF[‡]
JWA – Actuaires^{*}

Pierre THEROND

JWA – Actuaires^{*}

RESUME

Après avoir rappelé les contraintes économiques et réglementaires pesant sur les entreprises d'assurance, nous présentons la problématique de l'assureur vis-à-vis de ses allocations d'actifs et les modèles développés pour tenter de la résoudre. Nous proposons ensuite une illustration des récents développements des mathématiques actuarielles dans le cadre de l'évaluation d'un contrat d'assurance vie avec taux garanti et clause de participation aux bénéfices. Nous cherchons enfin à résoudre le problème de l'allocation d'actifs d'un portefeuille de rentes viagères en cours de service.

ABSTRACT

In this paper, we first introduce the economical and legal constraints that meet the insurance companies. Then we deal with the asset management of an insurer and we propose a few applications. After having estimate a parameter which makes a life insurance participating policy with a minimum interest rate guaranteed *fair*, we illustrate the asset management in two cases : the life insurance participating policy and a pension scheme.

MOTS-CLES : Entreprises d'assurance, allocation d'actifs, assurance-vie, rentes, taux garanti, option de participation aux bénéfices, solvabilité, *fair value*, probabilité de ruine.

KEYWORDS : Insurance company, asset allocation, life insurance, annuity, interest rate guarantee, bonus, solvency, fair value, ruin probability.

Août 2003

[†] 9, rue Beaujon, 75008 Paris

[‡] ISFA, 43, boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex

^{*} 18, avenue Félix Faure, 69007 Lyon

SOMMAIRE

Introduction	41
1. Environnement économique et réglementaire des entreprises d'assurance en France....	41
1.1. Particularités comptables.....	42
1.2. Contraintes de solvabilité	43
1.3. Futures normes comptables IFRS	45
2. Principaux modèles utilisés par les entreprises d'assurance pour déterminer leur allocation stratégique d'actifs.....	46
2.1. Préambule sur les entreprises d'assurance, leurs allocations et leurs objectifs.....	46
2.2. Les différents types de modèles	47
2.3. Contexte.....	49
2.4. Formulation du problème	51
2.5. Limites des modèles usuels	51
3. Quelques applications en assurance	52
3.1. Contrat d'épargne en Euros.....	53
3.2. Portefeuille de rentes en cours de service	59
Conclusion.....	64
Bibliographie	66

INTRODUCTION

L'objet de cet article est de présenter les techniques de valorisation de certaines clauses de contrats d'assurances issues des récents développements des mathématiques actuarielles et financières, ainsi que les techniques d'allocation stratégique d'actifs qui sont mises en place par les sociétés d'assurance.

Une des principales caractéristiques de l'activité d'assurance est l'inversion de son cycle de production : l'entreprise d'assurance perçoit les primes avant de payer les prestations. Du fait de cette particularité la compagnie doit estimer la charge de sinistres qu'elle va devoir régler pour établir un montant de prime ou de cotisation.

Avec ces primes, la société constitue au passif de son bilan des provisions techniques destinées à payer les sinistres futurs et place le montant de ces provisions sur les marchés financiers. Aussi la société doit se doter d'outils de gestion pour placer de manière optimale ses actifs tout en veillant à sa solvabilité à court, moyen et long terme.

Après un bref rappel des contraintes réglementaires auxquelles sont soumis les assureurs, nous présenterons les principaux modèles classiques d'allocation utilisés en assurance. Ces modèles seront ensuite illustrés dans la troisième partie.

1. ENVIRONNEMENT ECONOMIQUE ET REGLEMENTAIRE DES ENTREPRISES D'ASSURANCE EN FRANCE

L'assurance est un secteur économique très réglementé¹. Du fait de l'importance croissante de l'activité d'assurance dans une société qui cherche à toujours plus contrôler les risques et souhaite donc les transférer, le législateur intervient avec l'objectif de protéger les souscripteurs de contrats contre la défaillance des entreprises d'assurance.

¹ Tous les textes de loi cités sont issus du Code des assurances.

Les organismes d'assurance se situent donc à la croisée des intérêts de trois acteurs : les souscripteurs de contrats, les actionnaires et l'Etat. On peut alors schématiquement considérer que l'objectif des sociétés d'assurance est d'optimiser le profit de leurs actionnaires, tout en respectant les contraintes de solvabilité réglementaires et internes, et en préservant l'attractivité de leurs contrats vis-à-vis des assurés dans un marché concurrentiel.

1.1. PARTICULARITES COMPTABLES

Du fait de l'inversion du cycle de production et de la durée des engagements souscrits, les sociétés d'assurance doivent constituer des provisions techniques² destinées à régler les sinistres futurs. Le montant de ces provisions est estimé par les actuaires notamment à partir des cadences de règlement observées en assurance dommage et de la mortalité en assurance vie.

Le bilan d'une compagnie d'assurance se présente donc de la manière suivante :

Tableau 1 : Bilan simplifié d'une société d'assurance

ACTIF	PASSIF
Placements	Fonds propres
	Provisions Techniques (brutes de réassurance)
Part des réassureurs dans les Provisions Techniques	
Créances et autres actifs	Dettes et autres passifs

Le montant des provisions techniques et la nature des placements sont régulièrement contrôlés par la Commission de Contrôle des Assurances, des Mutuelles et des Institutions de Prévoyance (CCAMIP).

² Principalement les Provisions pour Sinistres A Payer (PSAP) en assurance non-vie et les Provisions Mathématiques (PM) en assurance vie.

1.2. CONTRAINTES DE SOLVABILITE

La principale contrainte pour les compagnies d'assurance correspond à la marge de solvabilité minimale réglementaire. Il s'agit d'une contrainte sur le niveau des fonds propres qui, ajouté aux plus-values latentes des placements, doit être supérieur à la Marge de Solvabilité Réglementaire³ (MSR) qui est fonction, en Europe, du volume d'activité de la société.

Pour les sociétés d'assurance vie, la MSR est principalement un pourcentage des provisions mathématiques qui varie selon les différents types de contrats⁴. En assurance non-vie elle est calculée de la façon suivante⁵ :

$$MSR = \text{Max}\{MSP, MSS\}$$

avec,

$$MSP = (18\% * \text{Min}(PE; 10) + 16\% * \text{Max}(PE - 10; 0)) * \text{Max}(CN / CB; 50\%)$$

et

$$MSS = (26\% * \text{Min}(S / 3; 7) + 23\% * \text{Max}(S / 3 - 7; 0)) * \text{Max}(CN / CB; 50\%)$$

où :

- ✓ *PE* désigne le montant⁶ des primes émises,
- ✓ *CN* la charge des sinistres nette de réassurance pour le dernier exercice,
- ✓ *CB* la charge des sinistres brute de réassurance pour le dernier exercice,
- ✓ *S* le montant de l'ensemble des sinistres payés, bruts de réassurance, au titre des trois derniers exercices, auquel on ajoute la variation de Provision pour Sinistres A Payer (PSAP) de la période.

La contrainte à respecter par les assureurs, à tout instant, peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\text{Richesse} \geq \text{MSR}$$

avec *Richesse* = *Capitaux propres* + *Plus values latentes* + *Réserve de capitalisation*

³ cf. article R. 334-1.

⁴ 4% des provisions pour les contrats avec garantie minimale de performance et 1% dans les autres cas. Cf. article R. 334-13.

⁵ Les taux (18%, 16%, etc.) peuvent changer dans certaines branches d'assurance (en frais de santé par exemple)

⁶ Les montants sont exprimés en millions d'euros.

En 2002 la marge de solvabilité des sociétés d'assurance était de 4,2 fois la MSR pour les sociétés d'assurance dommage et de 2,6 fois la MSR pour les sociétés d'assurance vie⁷.

Toujours dans une optique de solvabilité, le législateur impose aux assureurs deux règles prudentielles concernant les placements : la limitation par catégorie⁸ et la dispersion⁹.

Enfin, pour prévenir les défaillances éventuelles des assureurs, un arrêté du 26 décembre 2000 a consacré l'Etat T3¹⁰ ou Etat trimestriel de *reporting* Actif/Passif qui vise à étudier la sensibilité de l'actif et du passif des compagnies d'assurance aux performances des marchés financiers. Il s'agit d'un état qui doit être remis trimestriellement à la CCAMIP et qui permet de s'assurer que l'actif présente toujours une valeur supérieure au passif, même dans des conjonctures financières difficiles.

⁷ source : [8] FFSA, *L'assurance française en 2002*, rapport annuel, juin 2003.

⁸ cf. article R. 332-3.1.

⁹ cf. article R. 332-3.2.

¹⁰ cf. Arrêté du 26 décembre 2000 modifiant les articles A. 332-7 et A. 344-13.

1.3. FUTURES NORMES COMPTABLES IFRS

Les nouvelles normes comptables internationales, toujours en cours d'élaboration par l'*International Accounting Standards Board* (IASB / IFRS), seront mises en place à partir de 2005. Elles consacrent le principe de *fair value* et ont pour objectif de retranscrire la « valeur économique » de l'entreprise pour une meilleure information des marchés financiers et du public. Au-delà de l'impact direct sur la valorisation de leur actif, elles obligeront les assureurs à comptabiliser un certain nombre d'engagements qui ne le sont pas actuellement (cf. DOUARD [6]).

Le mode de valorisation des actifs imposé par l'IFRS constitue une évolution majeure. Les normes comptables françaises actuelles imposent l'évaluation des actifs financiers à leur valeur historique d'achat, voire à leur valeur de marché en cas de baisse importante des marchés. La valeur comptable de l'actif d'une société est donc bien souvent différente de la valeur réelle (valeur de marché) de ces actifs. Cette différence a été récemment atténuée par l'obligation faite aux assureurs d'inscrire à leur bilan des Provisions pour Dépréciation d'Actifs suite à la baisse des marchés actions¹¹.

Dans cette même optique de donner l'information la plus juste possible de la valeur de la société, un certain nombre d'engagements qui actuellement ne sont pas comptabilisés vont le devenir. Ainsi certaines obligations, réglementaires notamment, comme l'obligation de participation aux bénéfices¹² ou la clause de rachat¹³ dans les contrats d'épargne en Euros pourraient être comptabilisées et donc valorisées.

Un certain nombre de ces engagements peuvent s'interpréter comme des produits dérivés que les techniques issues de la finance permettent de valoriser.

¹¹ cf. articles R. 331-3 et R. 331-5-1

¹² Si la société réalise des résultats positifs, elle doit distribuer, globalement au niveau de la société, au moins 85% de ses bénéfices financiers et 90% de ses bénéfices techniques aux assurés. cf. article A. 132-2. Sur de nombreux contrats, des clauses de participation aux bénéfices spécifiques sont prévues, plus généreuses pour les souscripteurs que l'obligation légale de l'article A. 132-2.

¹³ Le détenteur de contrat peut à tout moment demander le « rachat » total ou partiel de son contrat et se voit verser le montant (total ou partiel) de la provision constituée éventuellement diminuée d'une (faible) indemnité fixée contractuellement. cf. article R. 331-5.

2. PRINCIPAUX MODELES UTILISES PAR LES ENTREPRISES D'ASSURANCE POUR DETERMINER LEUR ALLOCATION STRATEGIQUE D'ACTIFS

2.1. PREAMBULE SUR LES ENTREPRISES D'ASSURANCE, LEURS ALLOCATIONS ET LEURS OBJECTIFS

La gestion des actifs d'une entreprise d'assurance est un exercice délicat dans la mesure où le gestionnaire doit s'assurer à tout moment que les actifs en portefeuille sont les meilleurs, non seulement en terme de couple rentabilité/risque mais également au regard des engagements souscrits par l'entreprise et des contraintes comptables et réglementaires.

Les engagements pris par les entreprises d'assurance peuvent varier sensiblement d'une entreprise à l'autre. Ainsi, par exemple, une mutuelle spécialisée dans la couverture du risque Santé percevra des cotisations pour rembourser des sinistres sur 18 mois environ. A l'opposé, un « fonds de pension » percevra des cotisations qui serviront à payer des rentes plusieurs dizaines d'années plus tard. Dans le second cas, la performance de la gestion financière sera prépondérante. Les risques seront également plus importants dans ce cas, surtout si l'assureur a escompté dans sa tarification une performance minimale élevée des actifs financiers.

La recherche de l'allocation d'actifs au sein d'une entreprise d'assurance passe donc avant tout par l'analyse exhaustive des engagements contractés. Dans la pratique, cela signifie une relecture attentive de tous les documents contractuels. Cette étape permet notamment d'identifier les « cantons contractuels ». Les « cantons contractuels » correspondent à des contrats pour lesquels l'assureur s'est engagé à réaliser une gestion financière sur mesure. En d'autres termes, les sommes versées sur ces contrats serviront à acquérir des titres clairement identifiés, dont la performance reviendra exclusivement à leurs souscripteurs (après prélèvement des frais de l'assureur). Les contrats non cantonnés sont gérés par l'assureur dans son actif général, avec les actifs en représentation des fonds propres.

Dans la pratique l'assureur aura donc autant d'allocations d'actifs à définir qu'il aura de cantons contractuels (plus une pour l'actif général). Dans la recherche de l'allocation propre à chaque canton l'assureur devra en plus tenir compte des engagements pris envers les souscripteurs. Les modèles d'allocation devront par exemple intégrer le souhait de certains souscripteurs d'avoir une allocation d'actifs stratégique comprenant au moins 30% d'actions.

Tableau 2 : Bilan synthétique d'une entreprise d'assurance

ACTIF	PASSIF
Actif général	Fonds Propres
	Provisions techniques des contrats non cantonnés
Actifs financiers du canton n°1	Provisions techniques des contrats du canton n°1
Actifs financiers du canton n°2	Provisions techniques des contrats du canton n°2
etc.	etc.
Autres actifs	Autres dettes

Une des difficultés du pilotage de l'entreprise d'assurance sera de vérifier que les différentes allocations retenues pour les cantons sont acceptables au niveau global de l'entreprise d'assurance. Les règles imposées par les autorités de contrôle (en matière de dispersion et de diversification des actifs ou encore en matière de solvabilité) sont en effet applicables au niveau de l'entreprise tout entière et non canton par canton.

Le présent travail illustre notamment des méthodes de recherche d'une allocation d'actifs optimale au niveau d'un canton.

2.2. LES DIFFERENTS TYPES DE MODELES

Dans l'optique d'optimiser leurs placements, les assureurs ont développé des modèles d'allocation stratégique de leurs actifs et d'analyse, à tout moment, du bon adossement actif/passif.

Tableau 3 : Classification des différents types de modèles existants

Objectif / Nature des simulations	Déterministe	Stochastique
Allocation stratégique	Sans objet	Modèles de type 1
Etude de l'adossement – Approche par les flux	Modèles de type 2	Modèles de type 3
Etude de l'adossement – Approche comptable	Modèles de type 4	Modèles de type 5

Les modèles permettent :

- ✓ Soit de définir une allocation stratégique d'actifs *ex-ante*, à partir d'une analyse des engagements pris par l'assureur et des perspectives de rendement des actifs financiers disponibles sur les marchés. Le modèle, pour être le plus efficace possible sera stochastique. Il s'agit par exemple de modèles de type Markowitz, adaptés aux caractéristiques de l'assurance, ou de modèles tels que ceux présentés ci-après. Des propositions ont été faites par d'autres auteurs.
- ✓ Soit de modifier *ex-post* une allocation stratégique en examinant l'adossement entre les actifs et les passifs. Les adossements peuvent être étudiés simplement dans un premier temps à travers la comparaison des caractéristiques des flux que dégagent les actifs et les passifs (duration, sensibilité, convexité, valeur actuelle, taux actuariel, etc.). Une étude plus approfondie des adossements conduira à estimer les résultats futurs probables de la compagnie étudiée, pour différents scénarios d'évolution.

Tableau 4 : Points forts et limites des différents types de modèles

	Points forts	Limites
Modèles de type 1 (Allocation / stochastiques)	- Bonne modélisation de l'allocation stratégique	- Quelle modélisation des rendements ? - Quelles contraintes Assurance privilégier ?
Modèles de type 2 (Flux / Déterministe)	- Facilité de mise en œuvre - permettent une bonne prise de connaissance des risques pesant sur l'actif et le passif - permettent de mesurer la richesse du portefeuille	- Difficultés de mesurer de manière fine la sensibilité et la duration du passif pour certains contrats
Modèles de type 3 (Flux / Stochastique)	Idem modèles de type 2. - permettent d'obtenir une mesure du coût des options cachées	Idem modèles de type 1. - risque de construire des « boîtes noires » difficiles à justifier auprès des Directions Générales.
Modèles de type 4 (Comptable / Déterministe)	Idem modèles de type 2 - complètent utilement les modèles « embedded value » - permettent de connaître l'évolution prévisionnelle des grands postes comptables ¹⁴ (qui constituent des indicateurs utiles pour les décisions politiques)	Idem modèles de type 2
Modèles de type 5 (Comptable / Stochastique)	Idem modèles de type 4	Idem modèles de type 3 - difficultés pratiques de mise en œuvre (nombre de simulations et temps de traitement)

¹⁴ Grands postes comptables : résultats, provisions d'actifs et de passif, réserve de capitalisation, etc.

2.3. CONTEXTE¹⁵

2.3.1. PRESENTATION

L'assureur est amené à déterminer, en permanence, les valeurs globales des flux futurs :

- les primes,
- les prestations et les frais,
- les revenus du portefeuille d'actifs.

Si on désigne par X , Y et Z respectivement ces suites de flux, et si V désigne le mécanisme permettant d'associer à une suite de flux futurs son "équivalent capital" actuel, on a donc :

- $A(t) = V(t, Z)$ la valeur du portefeuille financier à la date t ,
- $V(t) = V(t, Y-X)$ la valeur nette du contrat.

La différence $S = A - V$ est, par définition, le surplus à la date t .

Une décomposition classique du surplus consiste à l'écrire sous la forme $S = M + E$, avec, si R désigne le montant des provisions :

- $M(t) = A(t) - R(t)$
- $E(t) = R(t) - V(t)$

E est la "VBIF" (Value of Business In Force).

La décomposition présentée ci-dessus coïncide avec la séparation entre les services actuariels et financiers : typiquement A est valorisé selon des méthodes d'inspiration financière (prix de marché et modélisation *ad hoc*), alors que E est valorisé avec des techniques actuarielles classiques, basées sur l'actualisation de l'espérance des flux futurs.

On voit que cela peut engendrer des incohérences, spécialement lorsque X et Y sont liés à Z (par exemple dans des contrats d'épargne offrant une participation aux bénéfices) ou que les contrats contiennent des "options cachées".

¹⁵ cf. [5] DE FELICE M., MORICONI F., "A course on Finance of Insurance", *Groupe Consultatif Actuariel Européen*, vol. 1, 2002.

L'idée est alors de rechercher des méthodes de valorisation cohérentes pour les aspects actuariels et financiers : on va utiliser pour cela des instruments de la théorie économique classique, notamment les notions de prix d'équilibre dans un marché complet et d'absence d'opportunité d'arbitrage.

2.3.2. REMARQUE SUR L'UTILISATION DE LA PROBABILITE RISQUE-NEUTRE

La transposition à l'assurance des techniques de valorisation issues de la finance conduit à évaluer une clause contractuelle en identifiant les flux qu'elle engendre et à en évaluer l'espérance actualisée sous la probabilité risque-neutre. C'est typiquement ces techniques qui sont mises en œuvre pour évaluer l'engagement associé à une clause de type « garantie plancher » dans un contrat d'épargne en unités de comptes (voir par exemple [17] MERLUS et PEQUEUX (2000)).

Mais, si on se place du point de vue de l'assureur et que l'objectif est de valoriser l'engagement pris vis-à-vis du souscripteur, les hypothèses sous-jacentes à l'utilisation de l'actualisation sous la probabilité risque-neutre, et notamment la possibilité de construire un portefeuille d'arbitrage auto-financé, ne sont pas satisfaites.

Au surplus, dans cette perspective, on peut souvent considérer que les flux auxquels se trouve confronté l'assureur sont des paramètres exogènes et que, dans ce cas, l'évaluation rationnelle de l'engagement consiste à calculer l'espérance actualisée sous la probabilité historique, qui décrit les flux auxquels l'assureur doit effectivement faire face au titre des dispositions du contrat ; en d'autres termes, dans une situation où il n'est pas possible de mettre en œuvre une stratégie de couverture sur un marché, l'utilisation de la probabilité risque neutre peut ne pas être adaptée.

Dans la suite de cet article, on précisera systématiquement l'univers de probabilité choisi en fonction du contexte.

2.4. FORMULATION DU PROBLEME

Notons X_t , Y_t et Z_t respectivement les flux de primes, de prestations et de frais et de revenus du portefeuille de placements à la date t . Soit F_t le flux de trésorerie de la société à la date t .

$$F_t = X_t - Y_t + Z_t \quad (1)$$

L'objectif de la société est de maximiser, sous les contraintes réglementaires et internes, la

$$\text{quantité : } E_Q \left[\int_0^T F_t * \exp \left\{ \int_0^t r(u) du \right\} dt \right]$$

où Q est la mesure de probabilité risque-neutre et $r(t)$ le taux sans risque instantané à la date t .

Les sociétés d'assurance ne peuvent influencer sur les taux et leur marge de manœuvre sur les futurs flux de primes et de prestations est réduite. En revanche elles sont libres de gérer leurs placements sous les contraintes réglementaires (cf. supra).

Une allocation stratégique est donc optimale si elle engendre des flux F^* tels que :

$$E_Q \left[\int_0^T F_t^* * \exp \left\{ \int_0^t r(u) du \right\} dt \right] = \underset{F}{\text{Max}} E_Q \left[\int_0^T F_t * \exp \left\{ \int_0^t r(u) du \right\} dt \right] \quad (2)$$

s.c. réglementaires

Il s'agit d'un problème classique de contrôle stochastique. On se référera utilement à [16] pour une présentation de la méthode de résolution dans le contexte de recherche d'un portefeuille optimal.

Dans la pratique, ce problème étant trop complexe pour être résolu directement, on se contentera de le résoudre dans un contexte simplifié. Par exemple, on se limitera à quatre classes d'actifs et l'on supposera les flux futurs de primes et de prestations connus.

2.5. LIMITES DES MODELES USUELS

Le principe des modèles déterministes est d'utiliser un certain nombre d'hypothèses et de projeter les différentes variables comme si le monde évoluait selon ces hypothèses. Il résulte

donc d'un modèle un résultat, dont on peut certes calculer la sensibilité à certains facteurs mais dont la variabilité est mal appréciée quand on considère l'ensemble des risques¹⁶ auxquels est soumise une société d'assurance.

L'absence d'information sur la variabilité des résultats fait de ces modèles des éléments peu pris en compte dans la gestion globale de la société.

De plus, un modèle de type Markowitz ne peut pas, par nature, retranscrire les contraintes de passif auxquelles les assureurs sont soumis. Ainsi, par exemple, sur un contrat d'épargne en euro garantissant une performance minimale de 2,5 % chaque année pendant 8 ans, le modèle de Markowitz pourra certes permettre de trouver l'allocation d'actifs la plus efficace pour un placement sur 8 ans, mais elle ne respectera peut-être pas avec une probabilité suffisante la contrainte de performance annuelle.

3. QUELQUES APPLICATIONS EN ASSURANCE

Les normes IFRS vont consacrer « la juste valeur » et exiger l'évaluation d'un certain nombre d'engagements pris par les assureurs qui n'étaient jusqu'à présent pas systématiquement valorisés. Il peut sembler difficile a priori d'évaluer la valeur d'un contrat qui comprend de nombreuses clauses qui n'ont pas de « prix unitaire » et qui n'ont aucune valeur de marché, les contrats d'assurance ne s'échangeant pas sur des marchés organisés, malgré des tentatives dans certains pays (via la « titrisation » de certains risques). Toutefois, en France, un certain nombre de clauses adossées aux contrats (taux minimum garanti, clause de rachat anticipé, participation au bénéfice, garantie plancher en cas de décès, etc.) s'apparentent à des produits dérivés qui, grâce aux outils classiques en finance, peuvent être valorisés.

On notera dans la suite :

- ✓ $P(s, t)$ la valeur en s d'un zéro-coupon sans risque qui verse 1 en t .
- ✓ N la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
- ✓ Q (resp. P) la mesure de probabilité risque-neutre (resp. historique).
- ✓ R_i le taux sans risque discret sur i années.

¹⁶ Risques d'actif mais aussi risques de passif (hausse de la sinistralité, défaillance des réassureurs, changement de réglementation, mauvais provisionnement, etc.) et risques actif/passif (mauvais adossement des actifs et des passifs en valeur, en durée ou en taux)
cf. DEMPSTER M.A.H., *Risk Management beyond Value at Risk*, Cambridge, 2002.

- ✓ E_Q (resp. E_P) l'opérateur espérance sous la probabilité risque-neutre (resp. historique).

Le paragraphe suivant propose une application des techniques de la finance dans le cadre d'un contrat d'assurance vie avec taux minimum garanti et clause de participation aux bénéfices. Il sera suivi d'un paragraphe illustrant l'allocation d'actifs d'un portefeuille de rentes viagères en cours de service.

3.1. CONTRAT D'EPARGNE EN EUROS

3.1.1. DESCRIPTIF DU CONTRAT

Moyennant une prime unique versée à la signature du contrat, l'assureur garantit à l'assuré une performance annuelle minimale de son épargne, qui est augmentée chaque fin d'année par une partie des bénéfices financiers réalisés. Le montant de l'épargne est reversé au détenteur de la police à l'échéance de celle-ci.

On suppose satisfaites les hypothèses simplificatrices suivantes :

- ✓ Le marché est parfait,
- ✓ Le taux d'intérêt sans risque r est constant pendant toute la durée du contrat,
- ✓ La prestation de l'assureur se limite au versement de l'épargne à l'échéance. Nous considérerons, dans cette présentation, qu'il n'y a pas de décès, ni de clause de rachat anticipé.

On notera enfin dans la suite de ce paragraphe :

- ✓ T l'échéance du contrat,
- ✓ R_G le taux discret annuel garanti par l'assureur,
- ✓ b le taux de participation aux bénéfices,
- ✓ Π la prime unique versée par l'assuré en 0,
- ✓ δ le chargement de sécurité pour couvrir les risques financiers,
- ✓ L_t le montant de l'épargne constituée à la date t ,
- ✓ E_t le montant des fonds propres à la date t ,

✓ A_t la valeur des placements à la date t .

3.1.2. ETUDE DE RENTABILITE

L'objet de ce paragraphe est d'étudier la rentabilité du contrat selon l'approche financière, utilisant la mesure de probabilité risque-neutre, puis selon une approche assurantielle. Dans le premier cas, on cherchera à déterminer, en fonction de la prime pure, le niveau de fonds propres qui va garantir l'absence d'opportunité d'arbitrage. La deuxième approche sera une étude, sous la probabilité historique, de la rentabilité du contrat.

Approche « Fair Value »

Etudions les bilans successifs, pour $t \in \{1, \dots, T\}$, générés par le contrat :

Bilan en 0		Bilan en t	
A_0	$E_0 = \alpha A_0$	A_t	E_t
	$L_0 = (1 - \alpha) A_0$		L_t

Compte-tenu de la responsabilité, limitée au capital, des actionnaires, l'épargne est revalorisée de la manière suivante :

$$L_{t+1} = (1 + R_G) L_t + b \left[\frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} - R_G \right]^+ L_t - \left[R_G - \frac{A_{t+1} - L_t}{L_t} \right]^+ L_t \quad (3)$$

Le premier terme du second membre de l'équation (3) représente la garantie de taux, le deuxième terme la participation aux bénéfices et le troisième, traduit la limitation aux fonds propres de la responsabilité des actionnaires.

Les fonds propres évolueront donc de la manière suivante :

$$E_{t+1} = A_{t+1} - L_{t+1} \quad (4)$$

L'assuré et les actionnaires recevront respectivement en T : L_T et E_T . Le contrat est « équitable » si, et seulement si, les rendements espérés (sous Q) des actionnaires et des assurés sont égaux au taux sans risque, *i.e.*

$$E_Q[L_T e^{-rT}] = L_0 \quad (5)$$

$$E_Q[E_T e^{-rT}] = E_0 \quad (6)$$

Le lecteur se référera à [9], [12] et [13] pour les propriétés de la mesure risque-neutre et les hypothèses sous-jacentes à son utilisation.

Supposons que le cours de l'actif ait une dynamique modélisé par un mouvement brownien géométrique (cf. [3]) :

$$\frac{dA_t}{A_t} = r dt + \sigma d\hat{B}_t \quad (7)$$

où \hat{B}_t est un Q -mouvement brownien standard.

Par des techniques de simulations (cf. [15]), on peut déterminer α pour que le contrat soit équilibré, *i.e.* que les équations (5) et (6) soient vérifiées. Notons $l_T^n(\alpha)$ et $e_T^n(\alpha)$ les valeurs simulées de L_T et E_T dans le n -ième état du monde généré ($n \in \{1, \dots, N\}$). On cherche α tel que :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{-rT} l_T^n(\alpha) = L_0(\alpha) \quad (8)$$

et

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{-rT} e_T^n(\alpha) = E_0(\alpha) \quad (9)$$

Illustration numérique

Avec les paramètres :

$$T = 8$$

$$b = 90 \%$$

$$R_G = 2,5 \%$$

$$r = \ln(1,05)$$

$$\sigma = 10 \%$$

On trouve :

$$\alpha = 1,635 \%$$

Ce pourcentage est à comparer avec les 4 % réglementaires pour les contrats avec garantie minimale de performance (cf. paragraphe 1.2.). Cet écart illustre le fait que les contraintes réglementaires aient, avant tout, pour objet de protéger les assurés contre une éventuelle défaillance de l'assureur.

Le sens de variation de α aux différents paramètres est indiqué ci-dessous :

	Ecart de taux $r - \ln(1 + R_G)$	Participation aux bénéfices b	Volatilité σ	Echéance du contrat T
α	+	-	+	+

Le besoin en fonds propres, pour que le contrat soit équitable, est croissant avec le risque et la durée du contrat. Il est décroissant avec le taux de participation aux bénéfices.

Approche « assurantielle »

Pour ce type de contrat, un niveau minimal de fonds propres est imposé par la réglementation par le biais de la marge de solvabilité réglementaire. Ce niveau est bien supérieur à celui qui rendrait le contrat « équitable », par conséquent dans l'équation de revalorisation de l'épargne (3), le troisième terme peut être supposé nul.

Dans la suite, on notera $R_p(t)$ le taux de revalorisation de l'épargne en t ($t \in \{1, 2, \dots, T\}$).

$$R_p(t) = R_G + b * \left[\frac{A_t - A_{t-1}}{A_{t-1}} - R_G \right]^+ \quad (10)$$

On peut donc écrire, pour chaque année t , le montant de l'épargne constituée :

$$L_t = (1 + R_p(t))L_{t-1} \quad (11)$$

avec $L_0 = (1 - \delta)\Pi$. Donc à l'échéance du contrat, l'assuré recevra :

$$L_T = L_0 * \prod_{t=1}^T (1 + R_p(t)) \quad (12)$$

La valeur actuelle probable de ce flux est donc :

$$V = E_P \left[L_0 \prod_{t=1}^T (1 + R_p(t)) \right] e^{-rT} \quad (13)$$

Si on pose par définition que la valeur nette du contrat à l'origine est égale à la différence entre la prime versée par l'assuré et l'engagement de l'assureur, on obtient que la rentabilité espérée du contrat, définie par $\rho = (\Pi - V) / L_0$, s'écrit :

$$\rho = \frac{1}{1 - \delta} - E_p \left[\prod_{t=1}^T (1 + R_p(t)) \right] e^{-rT} \quad (14)$$

Nous proposons ici d'étudier la rentabilité du contrat lorsque l'épargne est investie dans un titre dont le cours suit un mouvement brownien géométrique.

Supposons que l'actif soit composé d'une action de cours X et d'une obligation zéro-coupon de cours Y , dans les proportions initiales θ et $1 - \theta$:

$$A_t = A_0 (\theta X_t + (1 - \theta) Y_t) \quad (15)$$

avec :

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu dt + \sigma dB_t \quad (16)$$

où :

- ✓ $X_0 = 1$,
- ✓ B_t est un mouvement brownien standard sous la probabilité historique,
- ✓ $Y_t = \exp(rt)$.

En simulant l'évolution de l'actif, on peut estimer la rentabilité ρ du contrat.

Illustration numérique

Avec les paramètres suivants :

$T = 8$	$b = 90 \%$	$R_G = 2,5 \%$	$\delta = 2 \%$
$r = \ln(1,05)$	$\mu = \ln(1,07)$	$\sigma = 20 \%$	$\theta = 15 \%$

On obtient l'estimation : $\tilde{\rho} \approx 1 \%$

On note en particulier qu'avec les hypothèses retenues, l'espérance de gain pour l'assureur est relativement faible : ceci est la conséquence directe de la clause de participation aux

bénéfices. Elle est même négative, dans notre exemple, si l'assureur ne charge pas sa prime ($\delta > 0$). L'approche « *fair value* » peut permettre de calibrer le chargement en fonction du rendement des actionnaires que l'on souhaite atteindre.

3.1.3. ALLOCATION D'ACTIFS

Confronté aux contraintes décrites précédemment, l'assureur cherchera à composer son portefeuille financier, *i.e.* à arbitrer entre l'actif risqué X et le zéro-coupon Y . Nous faisons l'hypothèse que l'assureur détermine en 0 une allocation, qu'il conserve jusqu'à l'échéance du contrat. Son objectif sera de maximiser la rentabilité de l'assuré tout en contrôlant la probabilité de puiser dans les fonds propres, *i.e.* de ne pas réaliser le taux garanti. Cela revient à résoudre :

$$\max_{\theta} \left\{ E_p \left[\prod_{t=1}^T (1 + R_p(t)) \right] \mid P \left(\bigcap_{t=1}^T \left(\frac{A_t - A_{t-1}}{A_{t-1}} \geq R_G \right) \right) \geq 1 - \pi \right\} \quad (17)$$

où θ représente la part de l'épargne initialement placée en actif risqué, donc l'espérance à maximiser est croissante avec θ . L'assureur cherche donc le plus grand θ qui satisfasse la contrainte exprimée sous forme d'une probabilité. En simulant l'évolution du cours de l'actif risqué avec les mêmes paramètres que précédemment, on obtient le graphique suivant :

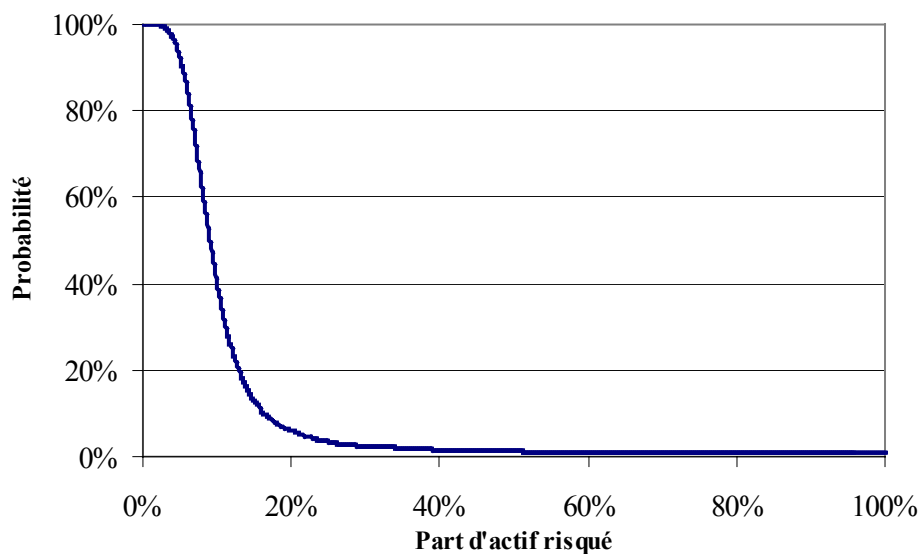


Figure 1 : Probabilité de ne pas faire appel aux fonds propres en fonction de θ

La probabilité de faire le rendement garanti chaque année, sera supérieure à 60 % si l'épargne est investie dans moins de 8,2 % d'actif risqué. Notons que si l'assureur investit comme précédemment 15 % de ses provisions en actif risqué, la probabilité de ne faire appel à aucun moment aux fonds propres pendant la durée du contrat ne dépasse pas 13 %.

3.1.4. DEVELOPPEMENTS RECENTS

La perspective de l'évaluation en « juste valeur » des engagements d'assurance, conséquence probable des travaux de l'IASB, a certainement participé aux récents travaux portant sur l'évaluation financière des contrats d'assurance vie contenant des clauses d'indexation à l'évolution des marchés.

Si l'évaluation de clauses telles que la participation aux bénéfices fait l'objet de nombreux articles depuis 1976 et l'article de BRENNAN et SCHWARTZ [4], ce n'est que plus récemment que des travaux concernant la clause de rachat anticipé ont été publiés, on retiendra notamment les articles de GROSEN et JORGENSEN [10], de BACINELLO [2] et de ANDREATTA et CORRADIN [1]. Remarquons enfin la thèse très complète de HANSEN [11].

3.2. PORTEFEUILLE DE RENTES EN COURS DE SERVICE

Intéressons-nous à présent à un portefeuille de rentes viagères en cours de service. Ces rentes sont servies depuis plusieurs années à des conjoints survivants, au titre d'un contrat de Prévoyance Collective souscrit par une entreprise industrielle auprès d'un assureur pour couvrir les conséquences financières du décès de ses salariés.

Au moment de la recherche de l'allocation d'actifs le portefeuille de rentes en cours de service présente les caractéristiques suivantes :

Nombre de bénéficiaires	374
Age moyen en 2003	63
Rente annuelle moyenne (en euro)	5 491
Provisions totales (en Meuro)	40,4
Provisions moyennes (en euro)	107 960

La recherche de l'allocation stratégique optimale consiste donc à définir la part d'actions et d'obligations à détenir (pour une valeur totale de 40,4 millions d'euro) pour faire face aux engagements. L'assureur s'est engagé contractuellement à servir chaque année les rentes et ce tant que les rentiers demeurent en vie. Il ne pourra donc pas diminuer le montant des rentes servies en cas de mauvaise performance de ses actifs. Par ailleurs l'assureur a escompté dans le calcul des provisions (celles-ci correspondent par définition à la valeur actuelle des rentes futures probables) une performance annuelle minimale des actifs de 1,5%¹⁷. On trouvera dans [7] une étude détaillée d'un tel portefeuille et une proposition de méthode d'allocation.

On notera :

- ✓ F_t le flux probable¹⁸ de l'année t (espérance des prestations à servir),
- ✓ i le taux technique instantané.

3.2.1. PROVISION POUR RISQUES FINANCIERS

L'assureur a escompté une performance annuelle des actifs dans le calcul de sa provision mathématique (PM). Toutefois il n'est pas à l'abri d'une fluctuation du rendement de ses actifs : supposons, par exemple, que l'assureur place le montant de la provision mathématique dans un actif de rendement aléatoire instantané $\tilde{r}(t)$ dont l'évolution est régie par une dynamique de type Cox, Ingersoll & Ross :

$$d\tilde{r}_t = a(b - \tilde{r}_t)dt + \sigma\sqrt{\tilde{r}_t} dz_t \quad (18)$$

où z_t est un mouvement brownien standard. Ce processus est classique pour construire des structures de taux dans le cadre de modèles à un facteur.

Si $E[\tilde{r}(t)] = 1,5\%$, la probabilité que la somme des prestations probables actualisées au taux de rendement de l'actif soit supérieure à la PM vaut 0,5. Dans la suite on se référera à cette probabilité quand on parlera de probabilité de ruine.

¹⁷ taux instantané.

¹⁸ Flux estimé en 0, à l'aide d'une table de mortalité prospective.

L'assureur souhaite diminuer cette probabilité et va constituer une provision pour risques financiers (PRF dans la suite). Il simulera donc des trajectoires de rendement de l'actif et choisira le montant de la PRF qui rend la probabilité de ruine « acceptable ».

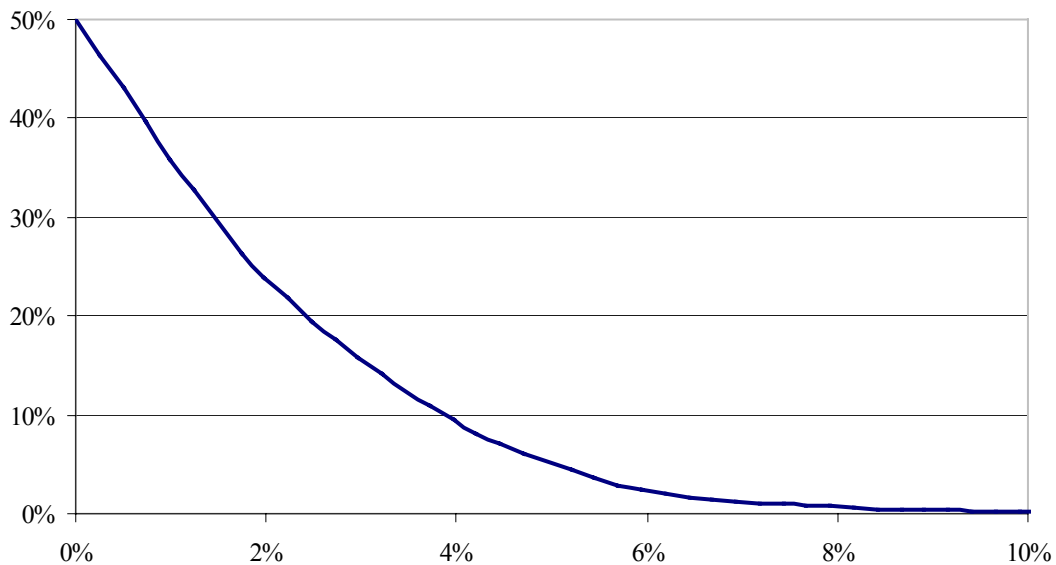


Figure 2 : Evolution de la probabilité de ruine en fonction de la PRF

La figure 2 représente cette probabilité en fonction du montant de la PRF (exprimée en pourcentage de la PM) pour les paramètres : $a = 0,5$ $b = 1,5 \%$ $\sigma = 5 \%$ $r(0) = 1,5 \%$

Le montant de la PRF pour que la probabilité soit inférieure à 1 %, est de l'ordre de 7,4 % de la PM.

3.2.2. ALLOCATION D'ACTIFS

De la même manière que dans le cadre du contrat d'épargne, l'assureur doit arbitrer entre un actif risqué et un zéro-coupon pour placer ses provisions. Nous supposons que ces deux actifs ont les mêmes caractéristiques que précédemment (cf. paragraphe 3.1.3).

L'assureur va, pour chaque année de prestation, déterminer l'allocation qui lui permet de maximiser le surplus espéré tout en contrôlant la probabilité de ne pas fournir le taux escompté entre 0 et la date de prestation t :

$$\max_{\theta} \left\{ E_P [A_t] \mid P \left(\bigcap_{s=1}^t (A_s \geq F_t * e^{-i(t-s)}) \right) \geq 1 - \pi \right\} \quad (19)$$

où :

- ✓ $A_s = F_t * e^{-it} * (\theta X_s + (1 - \theta)Y_s)$,
- ✓ π est une probabilité déterminée par l'assureur en fonction de sa sensibilité au risque.

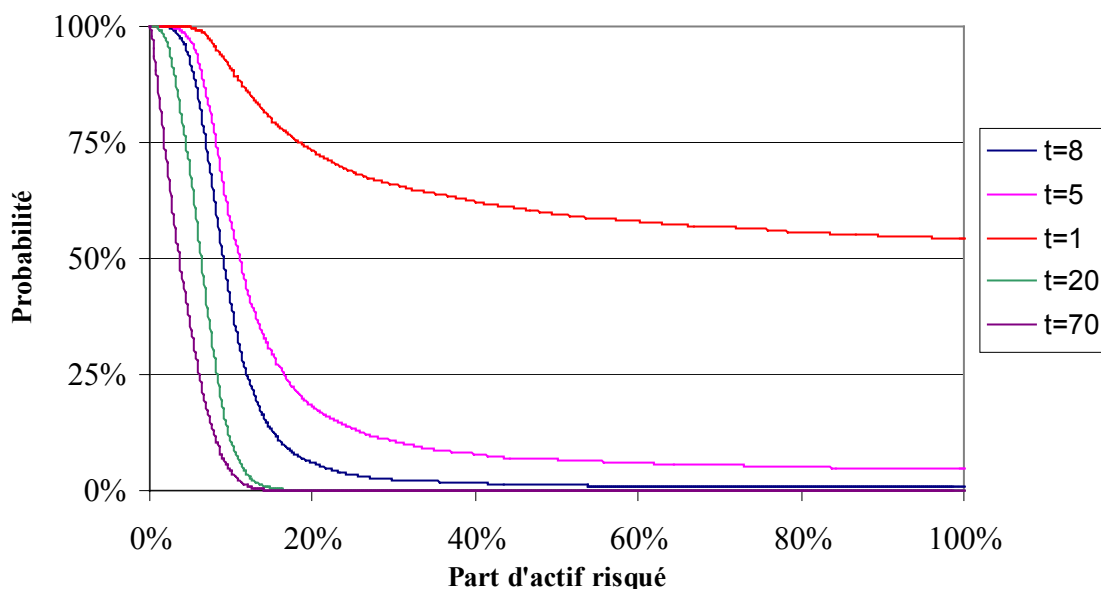


Figure 3 : Probabilité en fonction de la part en actif risqué pour divers horizons

La figure 3 propose l'évolution de la fonction : $1 - \pi = f(\theta)$ avec l'horizon de placement, *i.e.* de la date t du flux de prestation. Supposons que l'assureur fixe $\pi = 30\%$, la figure suivante illustre l'allocation en actif risqué en fonction de la durée du placement.

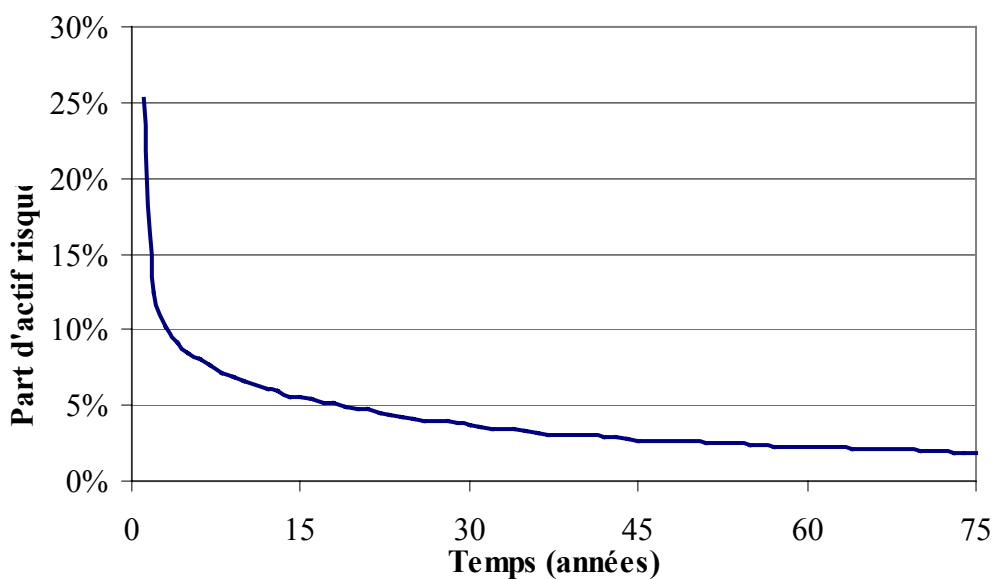


Figure 4 : Part d'actif risqué en fonction de la durée du placement

En pondérant les investissements en actif risqué par les flux actualisés au taux technique, on obtient la part globale d'actif risqué :

$$\theta \approx 7,48\%$$

La figure 4 nous indique que, pour une probabilité fixée, la part d'actif risqué diminue avec l'horizon du placement, ce résultat n'est pas intuitif et ne correspond pas à la pratique : il est généralement admis que la part action d'un investissement est croissante avec l'horizon de gestion. Cette décroissance est ici la conséquence du fait que la contrainte est très forte et qu'elle se resserre avec le temps :

$$\bigcap_{s=1}^{t+1} (A_s \geq F * e^{-i(t+1-s)}) \subset \bigcap_{s=1}^t (A_s \geq F * e^{-i(t-s)})$$

Cette contrainte stricte peut être relâchée en imposant « seulement » d'atteindre le taux garanti avec une probabilité fixée *a priori*. Le programme d'optimisation, pour le flux de prestation de l'année t , peut alors s'écrire :

$$\max_{\theta} \{E_p[A_t] \mid P(A_t < F_t) < \pi\} \quad (20)$$

Or

$$P(A_t < F_t) < \pi \Leftrightarrow P\left(\eta < \frac{1}{t} \ln \left\{ \frac{e^{it} - (1-\theta)Y_t}{\theta} \right\}\right) < \pi \quad (21)$$

où $\eta \sim N\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma}{\sqrt{t}}\right)$.

L'allocation stratégique est donc donnée par :

$$\theta = \frac{e^{it} - e^{rt}}{\exp\left\{\sigma q_{\pi} \sqrt{t} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right\} - e^{rt}} \quad (22)$$

où q_{π} est le quantile d'ordre π de la loi normale centrée réduite.

Pour $\pi = 1\%$, la figure 5 représente la part d'actif risqué du portefeuille en fonction de la date de prestation. La part globale en actif risqué sera alors de 38,8 % (pour une duration de passif de 13,5 années)

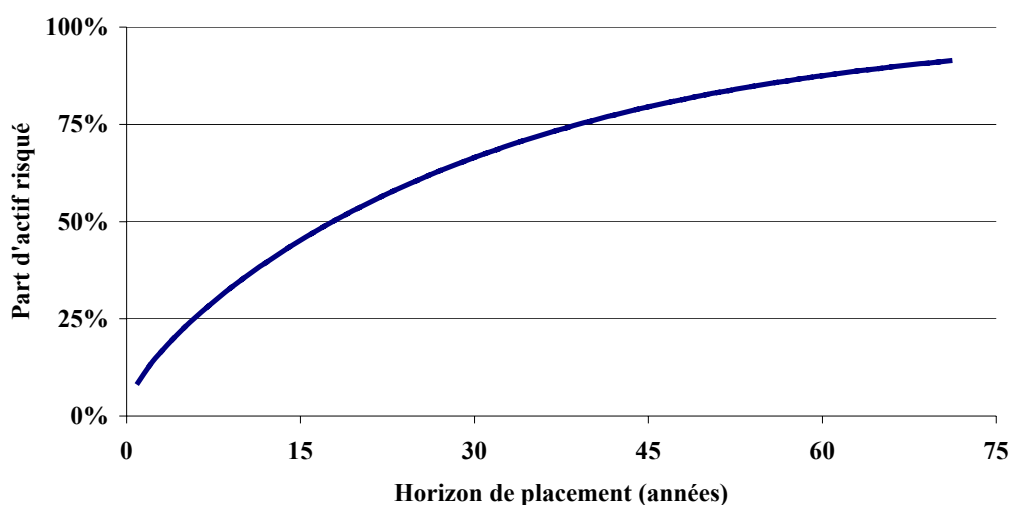


Figure 5 : Part d'actif risqué en fonction de l'échéance de la prestation

Cet exemple illustre le fait que l'assureur doit composer avec des contraintes assurantielles strictes et un pragmatisme raisonnable s'il souhaite procéder à une gestion suffisamment performante. Enfin les contraintes annuelles semblent inefficaces pour déterminer une allocation stratégique performante.

CONCLUSION

Confronté aux contraintes des nouvelles normes IAS - IFRS, le secteur de l'assurance doit intégrer dans sa démarche des méthodes de valorisation usuelles en finance ; ce faisant, il doit prendre garde à intégrer les contraintes assurantielles, tant au niveau de la valorisation d'un engagement qu'à celui du choix de l'allocation stratégique.

Cela impose en particulier d'utiliser des méthodes d'allocation intégrant les contraintes de type assurance : concrètement, le choix de l'allocation se fait en maximisant un gain espéré (ou surplus) sous la contrainte de respecter les dispositions réglementaires avec une probabilité suffisamment forte.

La résolution de ces programmes, dont deux exemples ont été présentés, passe en général par l'usage de méthodes de simulation, les clauses assurantielles (rachat, taux garanti, etc.) aboutissant le plus souvent à des formulations non explicites de l'espérance à maximiser.

Enfin, à la différence des problématiques financières, relatives à des produits échangés sur des marchés actifs et organisés, les problématiques de type assurance concernent des contrats qui ne s'échangent en général pas sur un marché organisé (les tentatives de titrisation des risques restent très marginales), et l'univers de probabilité sous lequel les évaluations doivent être menées n'est pas systématiquement l'univers « risque-neutre », mais est souvent l'univers historique.

Les outils traditionnels de la finance moderne doivent donc être adaptés pour tenir compte des spécificités des contrats d'assurance. Certains développements sont en cours et de nombreux devraient suivre dans l'optique de mesurer le coût des options cachées, notamment de la faculté de rachat offerte aux souscripteurs de contrats et de la possibilité de prorogation des contrats dont le terme est atteint.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ANDREATTA G., CORRADIN S., “Fair Value of Life Liabilities with Embedded Options : an Application to a Portfolio of Italian Insurance Policies”, AFIR Colloquium, 2003.
- [2] BACINELLO A.R., “Pricing guaranteed life insurance participating policies with periodical premiums and surrender option”, document de recherche, Università degli Studi de Trieste, 2002.
- [3] BLACK F., SCHOLES M., “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *Journal of Political Economy*, **81** (3), pp. 637-654, 1973.
- [4] BRENNAN M.J., SCHWARTZ E.S., “The Pricing of Equity-Linked Life Insurance Policies with an Asset Value Guarantee”, *Journal of Financial Economics*, **3**, pp. 195-213, 1976.
- [5] DE FELICE M., MORICONI F., “A course on Finance of Insurance”, *Groupe Consultatif Actuariel Européen*, vol. 1, 2002.
- [6] DOUARD H., “Normes IAS : Une nouvelle donne comptable pour les sociétés européennes cotées, un enjeu pour les actuaires”, *Bulletin Français d’Actuariat*, **4** (8), pp.141-151, 2000.
- [7] FARGEON L., NISSAN K., “Recherche d'un modèle actuariel d'analyse dynamique de la solvabilité d'un portefeuille de rentes viagères”, rapport d'un groupe de travail ENSAE, 2003.
- [8] FFSA, *L’assurance française en 2002*, rapport annuel, juin 2003.
- [9] GEMAN H., EL KAROUI N., ROCHET J.C., “Changes of numeraire, changes of probability measures and pricing options”, *Journal of Applied Probability*, pp. 433-458, 1995.
- [10] GROSEN A., JORGENSEN P.L., “Fair valuation of life insurance liabilities: The impact of interest rate guarantees, surrender options and bonus policies”, *Insurance: Mathematics and Economics*, **26**, pp. 37-57, 2000.
- [11] HANSEN M., “Applying Financial Economics to Life and Pension Insurance”, thèse, University of Southern Denmark, 2002.
- [12] HARRISSON J.M., KREPS D., “Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets”, *Journal of Economic Theory*, **20**, 1979.
- [13] HARRISSON J.M., PLISKA S., “Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading”, *Stochastic Processes and their Applications*, **11**, 1981.
- [14] HULL J.C., *Options, Futures & Other Derivatives*, 4^{ème} édition, Prentice-Hall, 1999.

- [15] JACQUEMIN J., PLANCHET F., “Méthodes de simulation”, article soumis au *Bulletin Français d’Actuariat*, 2003.
- [16] KARATZAS I., SHREVE S.E., *Brownian motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, 1988.
- [17] MERLUS S., PEQUEUX O., “Les garanties plancher des contrats d’assurance-vie en unités de compte: tarification et couverture”, mémoire d’actuaire ENSAE, 2000.
- [18] QUITTARD-PINON F., *Mathématiques financières*, ems, 2002.

Les normes IFRS vont conduire au provisionnement d'engagement qui n'étaient pas comptabilisés en France.

Les stock-options en sont un exemple puisque, jusqu'à présent, la seule obligation comptable des entreprises vis-à-vis des stock-options qu'elles octroyaient était de donner une information dans l'annexe des comptes annuels et dans le rapport de gestion.

Les normes IFRS vont contraindre les sociétés à évaluer puis à comptabiliser les charges qu'elles représentent. Cela aura un impact non négligeable sur les charges de la société, car bien qu'elles ne soient attribuées qu'à peu d'employés (à l'exception notable des *start-ups* pour lesquelles elles ont représenté un efficace moyen d'attraction des employés), elles le sont généralement en grand nombre puisqu'elles représentaient en 2001, 21 % de la rémunération des chefs d'entreprise français.

Le document ci-après est un article qui a été soumis au *Bulletin Français d'Actuariat*. Il s'agit de l'adaptation d'un document de spécification élaboré dans l'objectif de fournir un modèle d'évaluation de l'engagement engendré par un plan de stock-options, afin de l'implémenter dans le logiciel LASER. Ce logiciel est un outil d'évaluation d'engagements, notamment sociaux (retraites, indemnités de fin de carrière, etc.).

L'article propose une brève présentation des règles juridiques et fiscales qui régissent les stock-options puis présente un modèle d'évaluation de l'engagement qu'elles génèrent, par le biais de simulations.

EVALUATION DE L'ENGAGEMENT DE L'ENTREPRISE ASSOCIE A UN PLAN DE STOCK-OPTIONS

THE VALUE OF EMPLOYEE STOCK-OPTIONS FOR THE FIRM

Frédéric PLANCHET

Laboratoire SAF[‡]
JWA – Actuaire^{*}

Pierre THEROND

JWA – Actuaire^{*}

RESUME

Les réformes des normes comptables conduisent à provisionner de manière de plus en plus exhaustive tous les engagements pris par les sociétés, en particulier ceux résultant de la mise en place d'un plan de stock-options. L'objectif de ce travail est de rappeler le cadre réglementaire et fiscal des plans de stock-options puis de proposer un modèle d'évaluation de l'engagement d'une société ayant mis en place un tel plan.

MOTS-CLES : Stock-options, *fair value*.

ABSTRACT

In France, the companies have not to account the charges from delivering employee Stock-options. The future standards will force the firms to do it. In this paper, we first introduce the legal constraints that meet the firms which have to deal with employee Stock-options. Then we propose a model to estimate the value of these options.

KEYWORDS : Stock-options, fair value.

Septembre 2003

[‡] ISFA, 43, boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex

^{*} 18, avenue Félix Faure, 69007 Lyon

SOMMAIRE

Introduction	70
1. Définition	71
2. Cadre réglementaire et fiscal	72
2.1. Mise en place d'un plan de stock-options	72
2.2. Exercice des options et ventes des actions	74
3. Evaluation de l'engagement de la société	77
3.1. Les différents paramètres	78
3.2. Modélisation des flux financiers	78
3.3. Modèle.....	79
Conclusion.....	87
Bibliographie.....	87
Annexe 1 : Glossaire	88
Annexe 2 : Schéma de programmation du modèle	89

INTRODUCTION

Les futures normes comptables internationales, toujours en cours d'élaboration par l'*International Accounting Standards Board* (IASB) seront mises en place à partir de 2005. A propos des normes IAS/IFRS, le lecteur pourra se reporter au travail de DOUARD (2000). Elles ont pour principal objectif d'essayer de fournir la meilleure information quant à la « valeur économique » de l'entreprise. Dans cette optique, elles vont conduire à l'évaluation, puis à la comptabilisation, d'un certain nombre d'engagements non comptabilisés jusqu'à présent.

Les plans de stock-options figurent parmi ces engagements. La seule obligation des entreprises françaises à l'égard de tels plans est pour l'instant de donner une information dans l'annexe et le rapport de gestion.

L'impact des futures normes comptables sera donc non négligeable sur le résultat des entreprises. En effet, les stock-options sont un instrument important de la rémunération des

dirigeants des entreprises françaises, dont elles représentaient 21 % en 2001¹ ; il est prévu de les comptabiliser en charges sur la base de leur *fair value*.

Après un rappel du contexte réglementaire des stock-options, nous présenterons un modèle d'évaluation de l'engagement généré par de tels plan, puis une illustration numérique.

L'objectif de cet article est de proposer une méthode opérationnelle pour l'évaluation de l'engagement associé à un plan de stock-options.

1. DEFINITION²

Une stock-option est un droit, accordé par une entreprise à un salarié ou un dirigeant, d'acquérir dans le futur un nombre fixé à l'avance d'actions de la société ou d'une entreprise de son groupe :

- ✓ à un prix fixé lors de l'attribution du droit,
- ✓ entre deux dates futures.

Il existe en pratique deux types de stock-options :

- ✓ Les options de souscription qui, lorsqu'elles sont exercées, conduisent à la création de nouvelles actions, *i.e.* à une augmentation de capital.
- ✓ Les options d'achat qui, lorsqu'elles sont exercées, conduisent à un transfert d'actions entre la société et le détenteur de l'option.

Les conditions de délivrance et d'exercice des stock-options sont régies par un plan de stock-options.

¹ Source : Towers Perrin 2001.

² Le lecteur se reportera à l'Annexe 1 pour la définition des termes suivis de *.

2. CADRE REGLEMENTAIRE ET FISCAL

2.1. MISE EN PLACE D'UN PLAN DE STOCK-OPTIONS

Qu'elles soient cotées ou non, les sociétés anonymes, les sociétés par actions simplifiées et les sociétés en commandite par actions peuvent consentir à leurs salariés et dirigeants des stock-options³.

L'objet de ce paragraphe est de décrire les formalités auxquelles doit se soumettre la société qui souhaite octroyer cet avantage à ses employés.

2.1.1. OBLIGATIONS ADMINISTRATIVES

La décision d'octroyer des options est de la compétence de l'assemblée générale extraordinaire (AGE), statuant sur rapport du Conseil d'administration⁴ (CA) et sur rapport spécial des commissaires aux comptes, et qui autorise le CA à consentir les options⁵.

Dans le cadre de l'autorisation donnée par l'AGE, le CA fixe les conditions dans lesquelles sont consenties les options⁶. Il peut aussi, s'il l'estime opportun, différer l'octroi des options, voire y renoncer.

Lorsque le CA envisage d'offrir des options d'achat, il doit, préalablement à l'ouverture de celles-ci, faire acheter par la société les actions qui seront attribuées aux bénéficiaires s'ils lèvent leurs options⁷. Ce point est particulièrement important dans l'optique de l'évaluation de l'engagement. La société est expressément autorisée à racheter ses propres actions pour garantir les options d'achat, mais les options doivent être consenties dans le délai d'un an à compter de la date d'acquisition* des actions⁸, sous peine d'une amende. La société doit toutefois respecter les limitations quant à la détention par une société de ses propres actions : en effet une société ne peut détenir plus de 10 % de ses propres titres.

³ cf. Loi n° 66-537 du 24 juillet 1966 (L), art. 208-1 et 208-3 et Loi n° 99-587 du 12 Juillet 1999, art. 3.

⁴ ou le Directoire pour les sociétés à Directoire.

⁵ cf. art. L 208-1, al. 1 et art. L 208-3, al. 1

⁶ cf. art. L 208-1, al. 2 et 208-3, al. 2

⁷ cf. art. L 208-3, al. 1

⁸ cf. art. L 217-1

2.1.2. CARACTERISTIQUES DES OPTIONS

Le prix de souscription ou d'achat des actions

Le prix de souscription ou d'achat des actions est fixé par le CA au jour où l'option est consentie, selon les modalités déterminées par l'assemblée générale extraordinaire sur le rapport des commissaires aux comptes.

- ✓ Si les actions de la société sont admises aux négociations sur un marché, le prix de souscription ou d'achat ne peut pas être inférieur à 80 % de la moyenne des cours cotés aux vingt séances de bourse précédant ce jour. En outre, dans le cas d'options d'achat, le prix de l'action, au jour où l'option est consentie, ne peut pas être inférieur à 80 % du cours moyen d'achat des actions détenues par la société⁹.
- ✓ Si les actions ne sont pas cotées, l'AGE détermine librement les modalités selon lesquelles le CA fixera le prix de souscription ou d'achat (en fonction de critères objectifs tels que le chiffre d'affaires, la marge brute d'autofinancement, les bénéfices ou le montant des capitaux propres).

Le prix fixé pour la souscription ou l'achat des actions ne peut pas être modifié pendant la durée de l'option, sous réserve de la survenance de certaines opérations exceptionnelles : augmentation de capital, émission d'obligations convertibles ou réduction de capital.

Le nombre maximal d'actions qui peuvent être achetées ou souscrites

Le CA détermine librement le nombre maximal des actions qui pourront être souscrites ou achetées par chacun des bénéficiaires sous réserve que les options ouvertes et non encore levées ne donnent pas droit à un nombre d'actions excédent le tiers du capital social.

⁹ cf. articles L. 217-1 et L. 217-2

Le délai d'exercice*

Il est fixé par l'AGE. Il est possible de prévoir une période de blocage pendant laquelle les options ne peuvent être exercées. A cette période de blocage, peut s'ajouter une clause, limitée dans le temps, d'interdiction de cession des actions.

2.1.3. CHARGES POUR L'ENTREPRISE

Pendant la période qui s'étend de l'attribution à la levée des options, la société émettrice supporte :

- ✓ les frais d'acquisition des actions destinées à être remises aux bénéficiaires,
- ✓ les frais de gestion des actions ainsi achetées ou de celles émises en vue de faire face aux offres de souscription.

2.2. EXERCICE DES OPTIONS ET VENTES DES ACTIONS

2.2.1 CONDITIONS D'EXERCICE DES STOCK-OPTIONS

Sauf clause contraire expresse, les titulaires des options peuvent exercer leurs droits même s'ils ont quitté la société depuis l'attribution des options, et ce quelle que soit la cause de leur départ. La société est en effet irrévocablement engagée par son offre et n'a pas le pouvoir d'en modifier unilatéralement les conditions d'exercice. C'est pourquoi il est très fréquemment stipulé dans le règlement du plan que les intéressés devront, pour exercer leurs droits, faire partie de la société au moment où ils lèveront leurs options avec possibilité de prévoir des dérogations, par exemple en faveur des salariés qui partent en retraite ou qui doivent cesser leur activité pour cause d'invalidité.

En cas de décès du bénéficiaire, ses héritiers peuvent exercer l'option dans un délai de six mois à compter du décès¹⁰.

¹⁰ cf. Code du com. art. L. 225-183, al. 3

2.2.2 VENTE DES ACTIONS

Dès qu'ils ont levé leurs options et qu'ils sont inscrits en compte, les bénéficiaires peuvent exercer tous les droits attachés aux actions qui leur sont attribuées : droit de participer aux assemblées et d'y voter, droit aux dividendes, droit de communication, etc. Toutefois rien n'interdit de prévoir dans le plan un différé de jouissance.

Indisponibilité

Les titres issus de la levée de stock-options sont frappés d'une période de 4 ans (pour les stock-options attribuées depuis le 27 avril 2000) à partir de la date d'attribution*, pendant laquelle elles ne pourront être vendues.

Cette indisponibilité est levée dans les cas suivants¹¹ :

- ✓ invalidité du titulaire correspondant au classement dans la deuxième ou la troisième des catégories prévues à l'article L 341-1 du Code de la sécurité sociale,
- ✓ décès du titulaire,
- ✓ licenciement ou mise à la retraite du titulaire, à condition que les options aient été levées au moins trois mois avant la date de l'événement invoqué, c'est-à-dire, dans le premier cas, au moins trois mois avant la date à laquelle le salarié a reçu la notification de son licenciement et, dans le second cas, trois mois au moins avant la date de cessation du contrat de travail.

2.2.3 FISCALITE POUR LE BENEFICIAIRE

Il est important de bien cerner les aspects fiscaux des stock-options pour le bénéficiaire puisque ce sont eux qui vont déterminer en grande partie le comportement de celui-ci vis-à-vis de l'exercice de l'option ou de la vente des actions par exemple.

Pour calculer l'impôt sur le gain résultant de l'exercice des stock-options le fisc le décompose en trois parties : le " rabais ", la " plus-value d'acquisition " et la " plus-value de cession ". Chacune de ces parties sera grevée d'un impôt différent :

¹¹ cf. CGI annexe II art. 91 ter

- ✓ Le rabais est la différence entre le prix d'acquisition* et le cours de l'action au moment de l'attribution.
- ✓ La plus-value d'acquisition est la différence entre le cours d'acquisition* et le prix d'acquisition.
- ✓ La plus-value de cession est la différence entre le cours de cession* et le cours d'acquisition.

L'imposition est différente selon la date d'attribution des stock-options. En effet trois régimes fiscaux se sont succédés. Le tableau ci-dessous résume la fiscalité pour le salarié des stock-options attribuées depuis le 27 avril 2000¹².

Période d'indisponibilité		4 ans	
RABAIS		Autorisé jusqu'à 20% de la valeur de l'action au moment de l'attribution de l'option. Taxé à l'I.R., pour la part qui excède 5% comme complément de salaire (et assujettissement à la CSG, à la CRDS et aux cotisations de sécurité sociale).	
Avantage tiré de la levée de l'option : Plus-value d'acquisition	1) Cession (ou conversion au porteur) avant l'expiration de la période d'indisponibilité.	Imposition à l'I.R. dans la catégorie des traitements et salaires ⁽¹⁾ (et assujettissement aux CSG et CRDS sur salaires et aux cotisations de sécurité sociale).	
	2) Cession (ou conversion au porteur) après l'expiration de la période d'indisponibilité.	Cession (ou conversion) AVANT l'expiration d'un délai supplémentaire de portage de 2 ans.	Cession (ou conversion) APRES l'expiration d'un délai supplémentaire de portage de 2 ans).
		Avantage < 152 500 € ⁽²⁾ Taux de 30% ⁽³⁾	Avantage < 152 500 € ⁽²⁾ Taux de 16% ⁽³⁾
		Avantage > 152 500 € ⁽²⁾ Taux de : ▪ 30% ⁽³⁾ pour la fraction annuelle qui n'excède pas 1 MF. ▪ 40% ⁽³⁾ pour le surplus.	Avantage > 152 500 € ⁽²⁾ Taux de : ▪ 16% ⁽³⁾ pour la fraction annuelle qui n'excède pas 1 MF. ▪ 30% ⁽³⁾ pour le surplus.
PLUS-VALUE DE CESSION		Imposition à l'I.R. comme plus-value sur valeurs mobilières au taux de 16% ⁽³⁾ dès que le seuil annuel de cession de 7.623 € est dépassé.	

- ⁽¹⁾ En cas de licenciement, mise à la retraite, invalidité ou décès, le régime d'imposition sera équivalent à celui pratiqué lors de cession postérieure à l'expiration du délai d'indisponibilité (sous réserve) que la levée des titres soit intervenue 3 mois avant la notification de l'événement).
- ⁽²⁾ Sauf option pour le régime des traitements et salaires.
- ⁽³⁾ A ces taux s'ajoutent les prélèvements sociaux (CSG + CRDS + prélèvement social de 2%). Les taux effectifs d'imposition, correspondant aux taux de 16, 30 et 40% sont alors respectivement de 26, 40 et 50%.

Tableau 1 : Fiscalité des stock-options attribuées depuis le 27 avril 2000¹³

¹² Cf. art. 163 bis C du CGI.

¹³ source : www.societegenerale.fr (site de la Société Générale).

2.2.4 CHARGES POUR L'ENTREPRISE

La levée des options est susceptible d'entraîner les charges ou pertes ci-après :

- ✓ la rémunération des intermédiaires qui enregistrent les levées d'option et les frais d'inscription des actions sur le registre des transferts,
- ✓ en cas d'offre d'achat, la moins-value correspondant à la différence entre le prix auquel la société a acquis les actions proposées et le prix acquitté par les bénéficiaires,
- ✓ dans certaines situations, la charge des cotisations de sécurité sociale et des participations sur salaires ayant la même base de calcul (taxe d'apprentissage, participation à la formation professionnelle continue et participation-construction).

Ces charges sont déductibles du résultat fiscal de la société¹⁴. D'autre part les pertes résultant des conditions favorables consenties aux salariés pour l'exercice de leurs options sont régies par le régime de déduction des moins-values à long terme ou à court terme¹⁵.

3. EVALUATION DE L'ENGAGEMENT DE LA SOCIETE

L'objectif de cette partie est de proposer un modèle d'évaluation des engagements de la société, nés de l'existence d'un plan de stock-options. Cette évaluation doit permettre à la société de déterminer le montant de la provision associée.

Le projet de norme *IFRS X Share-based Payment* s'applique pour la comptabilisation des stock-options qui devront être évaluées en *fair value* à la date à laquelle le droit est accordé (*grant date*) *i.e.* à la date d'attribution de l'option.

On notera dans la suite du paragraphe Π la variable aléatoire « engagement de la société ». On cherchera donc à évaluer $E_p[\Pi]$ pour déterminer le montant de la provision à constituer.

¹⁴ Cf. art. 208-1 à 208-8 de la loi n° 66-537 du 24 juillet 1966.

¹⁵ Cf. art. 217 quinquies du CGI.

3.1. LES DIFFERENTS PARAMETRES

Nous proposons de structurer les hypothèses du modèle sur trois niveaux : la société, la catégorie de détenteurs de stock-options et l'individu. Nous supposons que certaines caractéristiques servant à évaluer l'engagement de l'entreprise seront les mêmes pour tous les détenteurs d'options, d'autres seront propres à chaque individu.

Le tableau ci-dessous détaille ces caractéristiques et le niveau auquel elles seront rattachées.

Niveau	Paramètres	Descriptif
Plan	v	Durée entre la date d'attribution de l'option et le moment où l'on peut exercer
	w	Durée entre la date d'attribution de l'option et le moment où elle ne sera plus exerçable
	π	Plus-value en pourcentage qui doit être réalisée pour qu'il y ait exercice
	S	Sous-jacent des options consenties (actions de la société ou d'une société du groupe)
Hypothèses financières	μ	Rendement espéré du sous-jacent S
	s	Volatilité du cours du sous-jacent S
	q	Taux de dividendes
	R	Taux d'intérêt sans risque discret
Hypothèses démographiques	$q(x)$	La probabilité de décès dans l'année d'une tête d'âge x
	$\tau(x)$	La probabilité de démission dans l'année d'une tête d'âge x
Données individuelles	x	Date de naissance du détenteur de stock-options
	T_a	Date d'attribution des stock-options
	$K(T_a)$	Prix d'exercice pour l'achat d'une action
	n	Nombre d'actions que va pouvoir acheter l'individu i grâce à ses stock-options
	$S(T_a)$	Cours de l'action à la date d'attribution des stock-options

Tableau 2 : Paramètres de l'évaluation

Lorsque dans la suite, on aura besoin de repérer un individu, on utilisera l'indice i .

3.2. MODELISATION DES FLUX FINANCIERS

Les flux financiers pour l'entreprise dépendent du comportement des détenteurs d'options. Nous proposons de modéliser le comportement des détenteurs d'options comme suit :

« Un détenteur d'option exerce dès lors que le cours de l'action dépasse de $\pi \%$ le prix d'exercice de ses stock-options. »

Cette assertion est certes simpliste, mais elle a le mérite d'être très facilement implémentable et de ne pas faire appel à des fonctions d'utilité des détenteurs d'options, dont il faudrait estimer les paramètres sur des effectifs fort restreints.

Si l'on note T_i , la date d'exercice « normal » de l'individu i , alors :

$$T_i = \text{Inf} \{ T_a + v \leq t \leq T_a + w \mid S(t) \geq (1 + \pi) * K(T_a, i) \} \quad (1)$$

En d'autres termes, l'option est exercée dès que le taux de « plus-value » est atteint. Remarquons que si la contrainte de plus-value n'est pas satisfaite dans l'intervalle de temps considéré, il n'y a pas exercice.

Le flux pour l'entreprise généré par l'individu i , à la date T_i est :

$$n(i) * [K(T_a, i) - S(T_i)] \quad (2)$$

D'autre part, nous supposons que la société a acheté les actions à la date d'attribution des stock-options associées à ces actions¹⁶. L'impact comptable sera donc limité à :

$$n(i) * [S(T_a) - K(T_a, i)] \quad (3)$$

3.3. MODELE

3.3.1. LE COURS DE L'ACTION

Nous modéliserons l'évolution du cours du titre coté par un brownien géométrique avec dividendes (cf. [8]) :

¹⁶ On rappelle que les sociétés doivent acheter les actions qui seront attribuées aux bénéficiaire avant que ceux-ci puissent exercer leur option. cf. art. L 208-3, al. 1.

$$\frac{dS}{S} = (\mu - q)dt + \sigma dB_t \quad (4)$$

où B_t est un mouvement brownien sous la mesure de probabilité historique.

Dans le cas d'une entreprise non cotée, on pourra faire l'hypothèse que $\sigma = 0$, et raisonner avec un simple rendement espéré. Dans la cas d'une entreprise cotée sur un marché organisé, σ pourra être estimée à partir de la volatilité implicite observée (cf. [1]).

Si h est le pas de discrétisation choisi pour simuler la trajectoire du cours de l'actions, l'approximation d'Euler (cf. [6]) nous donne :

$$\frac{S(t+h) - S(t)}{S(t)} = (\mu - q) * h + \sigma \sqrt{h} \varepsilon \quad (5)$$

où ε est une variable aléatoire $N(0,1)$.

Nous simulerons l'évolution du cours de l'action entre la date de l'étude et l'horizon H (en années) qui correspond à la date $Max_i \{T_a(i) + w\}$. Si t_0 est la date de l'étude, cela nécessitera

donc $\frac{H}{h}$ tirages aléatoires pour chaque état du monde. Nous simulerons des trajectoires

mensuelles, donc $h = \frac{1}{12}$. Le cours de l'action sera donc simulé par la récurrence suivante.

$$S\left(t + \frac{1}{12}\right) = S(t) * \left[(\mu - q) * \frac{1}{12} + \sigma \sqrt{\frac{1}{12}} \varepsilon + 1 \right] \quad (6)$$

où ε est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

On se référera à JACQUEMIN et PLANCHET (2003) pour la simulation de réalisations de variables aléatoires de loi normale centrée réduite.

3.3.2. LE DECES OU LA PERTE DE DROIT DU DETENTEUR DE STOCK-OPTIONS

Le décès

Si le détenteur de stock-options vient à décéder, ses héritiers peuvent exercer les options dans un délai de 6 mois (cf. 2.2.1). Nous modéliserons ce principe par l'exercice de l'option à la fin de l'année du décès si le cours de l'action est supérieure au prix d'exercice. Le décès sera, quant à lui, modélisé à l'aide de tables de mortalité.

Ainsi, si l'on note D_i la date du décès de l'individu n° i , ses héritiers exerceront les stock-options en D_i si :

$$S(D_i) \geq K(T_a, i) \quad (7)$$

En cas d'exercice, l'entreprise recevra à la date D_i : $n(i) * K(T_a, i)$. Elle livrera alors aux héritiers : n actions de valeurs comptable $S(T_a(i))$ et de valeur de marché $S(D_i)$.

La perte du droit d'exercice

Nous supposons que le plan stipule que le départ volontaire (démission) de la société entraîne la perte du droit d'exercice, comme c'est souvent le cas en pratique. On rappelle que le départ à la retraite ne fait généralement pas perdre ce droit (sauf clause contraire dans le plan). On considérera toutefois qu'en cas de départ du salarié, s'il a intérêt à exercer, il le fait à la date de départ.

Si le salarié n° i quitte la société à la date t pour une cause différent du décès, l'option est exercée en t si :

$$S(t) \geq K(T_a, i) \quad (8)$$

Pour chaque catégorie de bénéficiaires, on dispose donc d'une table sur laquelle figure les probabilités que l'employé quitte la société en fonction de son âge. On notera $\tau(x)$ la probabilité que le bénéficiaire d'âge x quitte la société dans l'année.

3.3.3. VALEUR DE L'ENGAGEMENT DE L'ENTREPRISE

Dans un souci de cohérence avec l'évaluation de l'engagement des autres passifs sociaux (retraites, indemnités de fin de carrière, etc.), on utilisera systématiquement la probabilité historique. En effet l'évaluation de ces engagements repose sur l'actualisation de flux futurs probables et non sur la réplcation des flux par des instruments financiers.

L'utilisation de la mesure risque-neutre ne poserait pas de problème pratique (on remplacerait μ par $\ln(1 + R)$ dans la dynamique du cours), en revanche son utilisation doit être justifiée sur le plan théorique ; ce point n'est pas abordé dans le présent travail.

Etude théorique

Notons μ_x le taux instantané de mortalité ou de départ à l'âge x . De même, notons ${}_t p_x$ la probabilité qu'un individu d'âge x soit toujours en vie et dans la société à l'âge $x + t$. On a la relation usuelle (cf. [7]) :

$${}_t p_x = \exp\left\{-\int_0^t \mu_{x+s} ds\right\} \quad (9)$$

Si l'on connaît l'évolution du cours de l'action sous-jacente (et donc T_i la date d'exercice « normal »), la VAP de l'engagement de l'entreprise vis à vis de l'individu i peut alors s'écrire :

$$E_P[\Pi|T_i] = \left(\frac{{}_{T_i} p_x}{(1+R)^{T_i}} + \int_0^{T_i} \frac{{}_s p_x \mu_{x+s}}{(1+R)^s} ds \right) * n * [S(T_a) - K] \quad (10)$$

Incidentement, on notera qu'on utilise implicitement l'hypothèse d'indépendance entre les facteurs démographiques et financiers.

Remarquons que le terme $S(T_a) - K$ de l'équation (10) résulte de l'obligation légale pour l'entreprise d'acheter les titres auxquels donnent droit les options. Sans cette contrainte, on pourrait faire l'hypothèse que l'entreprise achète les titres au moment de l'exercice des options. Ce terme serait alors remplacé par $S(T_i) - K$.

Le montant de la provision est alors obtenu par :

$$E_p[\Pi] = E_p[E_p[\Pi|T_i]] \quad (11)$$

Le calcul explicite de $E_p[\Pi]$ n'est pas trivial, il nécessite de déterminer la loi du temps d'arrêt T_i défini par (1). En pratique on cherchera donc à approcher $E_p[\Pi]$ par des méthodes de simulation.

On remarquera toutefois qu'il est formellement possible d'obtenir la loi du temps d'arrêt T_i . En effet :

$$S_t = S_0 * \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right\} \quad (12)$$

et :

$$T_i = \inf\{t_1 \leq t \leq t_2 \mid S_t \geq a\} \quad (13)$$

où :

- ✓ $t_1 = T_a + v$,
- ✓ $t_2 = T_a + w$,
- ✓ $a = (1 + \pi) * K(T_a)$.

Donc, après quelques calculs élémentaires, il vient :

$$T_i = \inf\{t_1 \leq t \leq t_2 \mid B_t \geq \alpha t + \beta\} \quad (14)$$

où :

- ✓ $\alpha = -\frac{\mu - \sigma^2/2}{\sigma}$,

$$\checkmark \quad \beta = \frac{\ln(a/S_0)}{\sigma}.$$

Grâce au théorème de Girsanov et au théorème d'arrêt, on peut obtenir la loi de T_i (cf. [5] p. 196). Notons :

$$\tilde{T} = \inf \{t \geq 0 \mid B_t \geq \alpha t + \beta\} \quad (15)$$

\tilde{T} est le temps d'atteinte d'une barrière pour un mouvement brownien avec dérive, sa loi est bien connue.

Si \tilde{f} désigne la densité de la loi du temps d'arrêt \tilde{T} , alors on peut exprimer la loi recherchée par :

$$P(T_i \in dt) = [\pi_1 * \delta_{[0;t_1]}(t) + \pi_{[t_1;t_2]}(t) * \tilde{f}(t) + \pi_2 * \delta_{[t_2;\infty]}(t)] dt \quad (16)$$

où : $\pi_1 = P(\tilde{T} \leq t_1)$ et $\pi_2 = P(\tilde{T} > t_2)$.

Le calcul des intégrales (10) et (11) est cependant fastidieux, même avec des fonctions de survie classiques.

Mise en pratique : discrétisation

En pratique, pour évaluer cet engagement, on approximera l'équation (10) par une version discrète. Avec les notations usuelles, on obtient :

$$E_P[\Pi|T_i] \approx n(S(T_a) - K)^+ * \left\{ \begin{aligned} & \prod_{k=1}^{T_i} (1 - \tau(x+k)) * \frac{T_i P_x}{(1+R)^{T_i}} \\ & + \sum_{k=1}^{T_i-1} \left[\prod_{j=1}^{k-1} (1 - \tau(x+j)) \right] * {}_{k-1}P_x * \frac{q_{x+k} + \tau(x+k)}{(1+R)^k} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Le premier terme du second membre de cette équation représente l'exercice « normal » de l'option ; le deuxième terme, l'exercice en cas de décès ou de départ de la société.

Cette forme se prête bien aux simulations numériques ainsi que nous allons le voir ci-après.

3.3.4. APPLICATION

L'objectif de l'application développée est d'estimer $E_p[\Pi]$ dont la valeur est fournie par les équations (11) et (17). On effectue un grand nombre de simulations de l'évolution du cours de l'action et pour chaque « état du monde » ainsi généré, on calcule la valeur actuelle de l'engagement de la société. L'engagement de l'entreprise est ensuite estimé à partir des valeurs trouvées dans chaque « état du monde ».

$$\hat{\Pi} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N vap(n) \quad (18)$$

où $vap(n)$ est le montant de l'engagement de l'entreprise dans la n-ième simulation.

Les simulations nous permettent aussi d'estimer l'écart-type de l'engagement de la société, grâce à l'estimateur :

$$\hat{\sigma}(\Pi) = \left[\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (\hat{\Pi} - vap(n))^2 \right]^{1/2} \quad (19)$$

Pour chaque détenteur de stock-options, on estime donc, à la date d'étude, la valeur actuelle probable de l'engagement de la société vis-à-vis de cet individu. Le passif du plan est ensuite constitué de la somme de ces valeurs actuelles probables.

Le lecteur trouvera en Annexe 2 des schémas de synthèse du modèle proposé. Le schéma général de programmation du modèle est résumé sur la Figure 1. La Figure 2 récapitule propose un rappel du schéma de génération de trajectoires du cours de l'action sous-jacente.

Illustration numérique

Avec les hypothèses suivantes :

$v = 2$ ans	$w = 6$ ans	$\pi = 25 \%$	$\sigma = 20 \%$
$q = 0$	$R = 5 \%$	$x = 50$ ans	$\mu = \ln(1 + 7\%)$
$T_a = 0$	$K(T_a) = 90$	$S(T_a) = 100$	$n = 1$

Et en utilisant :

- ✓ la table de mortalité TV 2000 pour déterminer les ${}_t p_x$.
- ✓ $\tau(x) = 1 \%$, $\forall x$.

Nous avons effectué 30 000 simulations et obtenu, en pourcentage du cours à la date d'attribution des stock-options :

$$\hat{\Pi} = 8,25\%$$

$$\hat{\sigma}(\Pi) = 3,52\%$$

3.3.5. QUELQUES CARACTERISTIQUES DE L'ENGAGEMENT

L'engagement est faiblement croissant avec l'âge du bénéficiaire puisque l'accroissement de l'engagement de l'entreprise vis-à-vis d'un employé de 65 ans est seulement de 0,26 % supérieur à celui généré pour un employé de 20 ans.

D'autre part, on remarquera que la valeur de cet engagement est limité au rabais accordé et que sous cette barrière, l'engagement est, en première approximation, linéaire avec le rendement espéré de l'action. Ce résultat est logique puisque plus μ est grand, plus la barrière de la règle de décision (1) sera rapidement atteinte et donc le facteur d'actualisation petit. Ainsi avec les paramètres de l'illustration numérique, on a la relation suivante (en pourcentage) du cours d'acquisition :

$$E_P[\Pi] = 20 * \mu + 6,5 \quad (20)$$

pour $\mu < 17 \%$ (avec un coefficient de corrélation supérieur à 90 %).

Enfin la provision est une fonction décroissante de π , le pourcentage de plus-value qui doit être réalisée pour qu'il y ait exercice « normal ».

CONCLUSION

L'avènement des nouvelles normes internationales va contraindre les entreprises à évaluer et provisionner l'engagement résultant de la mise en place d'un plan de stock-options.

Dans ce travail, nous avons présenté un modèle simple d'évaluation de cet engagement. Ce modèle nous a permis d'établir la faible dépendance de l'engagement de l'entreprise vis-à-vis de l'âge du bénéficiaire et d'exhiber une dépendance linéaire entre le rendement de l'action sous-jacente et l'engagement de la société.

Remarquons enfin, que si l'application des normes IFRS conduisait à évaluer en *fair value* les produits financiers, la société devrait comptabiliser les actions qu'elle détient à leur valeur de marché et l'engagement résultant du plan pourrait alors s'analyser comme une option d'achat de type américain, sur les actions de la société, pouvant s'exercer sur la période $[T_a + v, T_a + w]$. Sa valeur se déduirait du prix actualisé d'un tel instrument.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AUGROS J. C., MORENO M., *Les dérivés financiers et d'assurance*, Economica, 2002.
- [2] DOUARD H., "Normes IAS : Une nouvelle donne comptable pour les sociétés européennes cotées, un enjeu pour les actuaires", *Bulletin Français d'Actuariat*, **4** (8), pp.141-151, 2000.
- [3] HULL J.C., *Options, Futures & Other Derivatives*, 4^{ème} édition, Prentice-Hall, 1999.
- [4] JACQUEMIN J., PLANCHET F., "Méthodes de simulation", article soumis au *Bulletin Français d'Actuariat*, 2003.
- [5] KARATZAS I., SHREVE S.E., *Brownian motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, 1988.

- [6] LAMBERTON D., LAPEYRE B., *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, 2nde édition, ellipses, 1997.
- [7] PETAUTON P., *Théorie et pratique de l'assurance vie*, Dunod, 1991.
- [8] QUITTARD-PINON F., *Mathématiques financières*, ems, 2002.

ANNEXE 1 : GLOSSAIRE

Date d'attribution

Date du jour où le droit est accordé. Elle figure dans le règlement du plan de stock-options et dans la lettre de notification individuelle reçue par le salarié.

Date d'acquisition

C'est la date à laquelle le salarié lève les stock-options et transforme celles-ci en actions. Il verse à ce moment-là le prix d'acquisition.

Date de cession

Date à laquelle le salarié vend ses actions provenant des stock-options.

Cours d'attribution

C'est la moyenne des cours de clôture de l'action des 20 jours qui précèdent celui de l'attribution pour une société cotée.

Prix d'acquisition (ou d'achat ou de souscription)

C'est le prix d'exercice des stock-options, il est fixé à l'attribution des options.

Cours d'acquisition

Cours de l'action à la date d'acquisition.

Cours de cession

Cours de l'action à la date de cession.

Délai d'exercice

Délai prévu par le plan durant lequel l'exercice est possible.

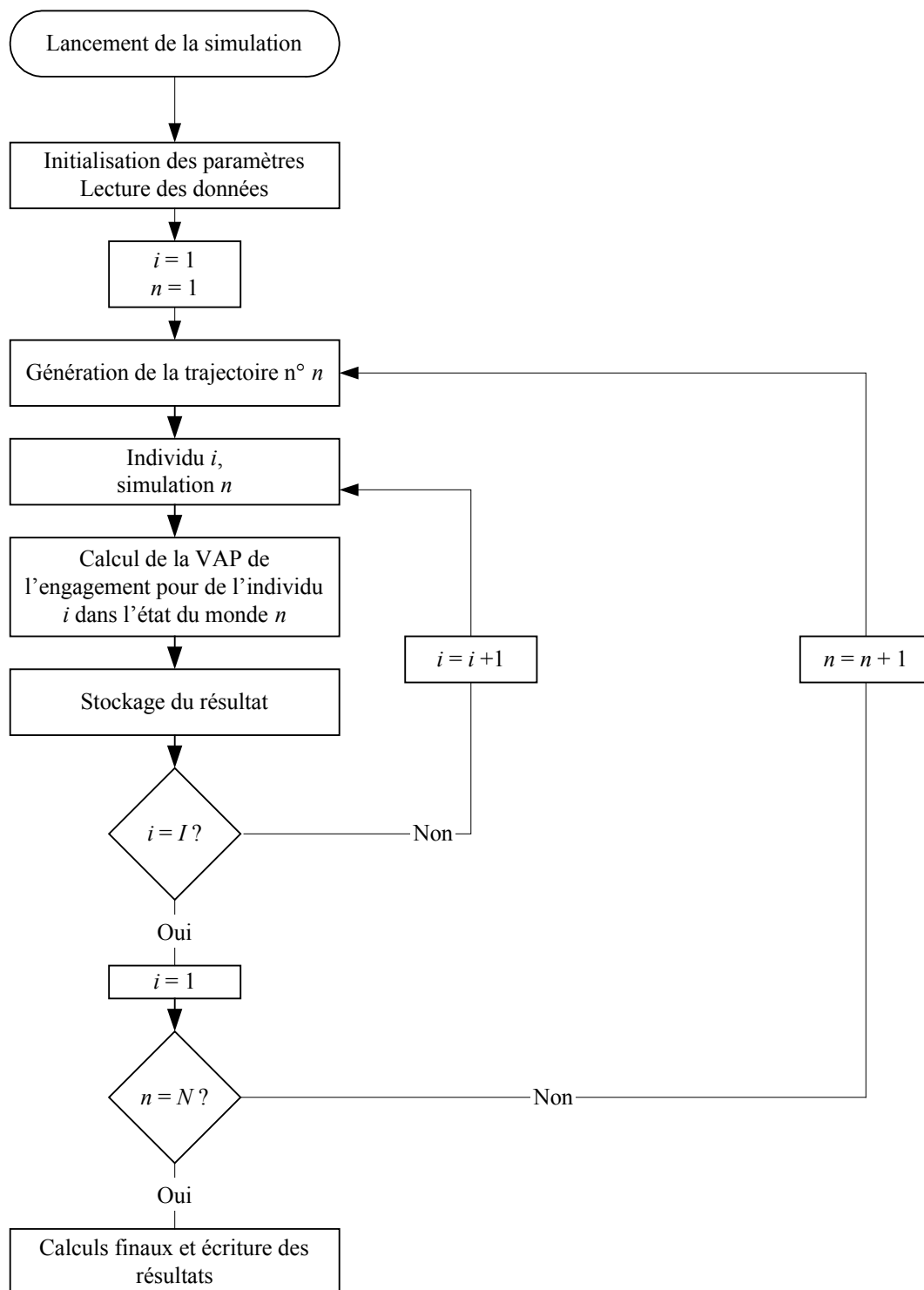


Figure 1 : Schéma général de programmation du modèle

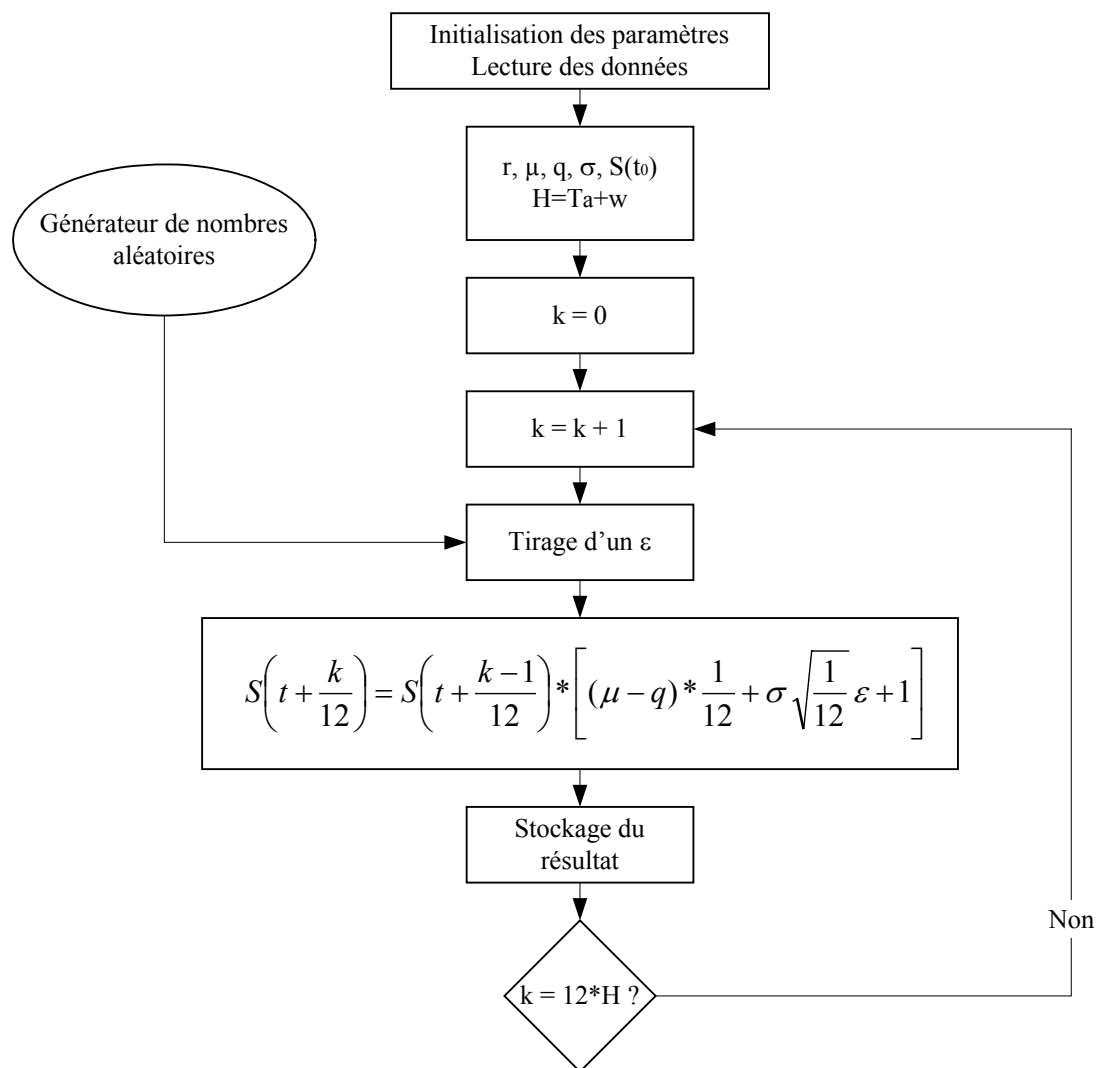


Figure 2 : Schéma de génération des trajectoires du cours de l'action

IMAGE est un logiciel de projection de portefeuilles de contrats d'assurance destiné notamment à calculer des *embedded value*. Pour ce faire, il projette des flux déterministes sur un horizon déterminé par l'utilisateur et en déduit la valeur économique du portefeuille de la société.

L'objet du document suivant était de décrire les adaptations à apporter à IMAGE afin que la partie Actif du logiciel soit stochastique. En effet, il apparaît aujourd'hui comme indispensable aux dirigeants des sociétés d'assurance vie de disposer de projections de la valeur économique de leur firme prenant en compte la volatilité des placements financiers.

L'annonce des normes IFRS a certainement accéléré ce mouvement. Ce document est l'occasion d'illustrer l'utilisation de modèles financiers en assurance sur le thème de la valorisation d'une compagnie d'assurance. Par ailleurs, le document aborde des aspects pratiques liés à l'implémentation du modèle : modalités de stockage des résultats pour conserver des temps de traitement raisonnables.

Logiciel IMAGE

DEVELOPPEMENT DU MODELE « ACTIF STOCHASTIQUE»

Frédéric PLANCHET

Pierre THEROND

1. Module ACTIF déterministe en place dans IMAGE	93
2. Présentation générale du module stochastique.....	93
3. Modélisation stochastique de l'actif	94
3.1. Choix des méthodes	94
3.1.1. Discrétisation.....	95
3.1.2. Générateur de nombre aléatoire	95
3.1.3. Choix de la probabilité sous-jacente	95
3.2. Données en entrée et algorithmes de calcul	95
3.2.1. Les taux d'intérêt.....	95
3.2.2. Les actions.....	97
3.2.3. L'immobilier	99
3.2.4. Le monétaire.....	100
3.3. Obtention des résultats	100
3.4. Une boucle de l'algorithme	102
4. Description du stockage des résultats.....	102
4.1. Notations	103
4.2. Stockage intermédiaire d'un état du monde pour les actifs	103
4.3. Résultats	103
4.3.1. Première approche : stockage minimal	104
4.3.2. Seconde approche : stockage complet.....	104
5. Application.....	105
5.1. Compte de résultat du modèle déterministe	105
5.2. Compte de résultat du modèle stochastique	106

1. MODULE ACTIF DETERMINISTE EN PLACE DANS IMAGE

Le module actuellement en place est déterministe. A partir du portefeuille des placements à la date de l'étude, il projette l'évolution des actifs grâce à des rendements prévisionnels renseignés par l'utilisateur et donne la valeur des ces actifs pour chaque année jusqu'à la date de fin de l'étude.

Entrées	Algorithme	Sorties
✓ Données (composition actuelle de l'actif)	Actions & immobilier Leur valeur de marché évolue selon le taux de rendement paramétré.	Composition de l'actif aux dates de bilan. (stocks)
✓ Rendement des différentes catégories d'actifs	Monétaire Le montant évolue uniquement au gré des mouvements d'actifs. Rémunération de la trésorerie à un taux paramétré par l'utilisateur	Flux prévisionnels
✓ Hypothèses d'investissement et de désinvestissement	Obligations Valeur de marché calculée en fonction de la courbe des taux (paramétrée par l'utilisateur).	Valeur actuarielle de l'actif
✓ Horizon d'étude		

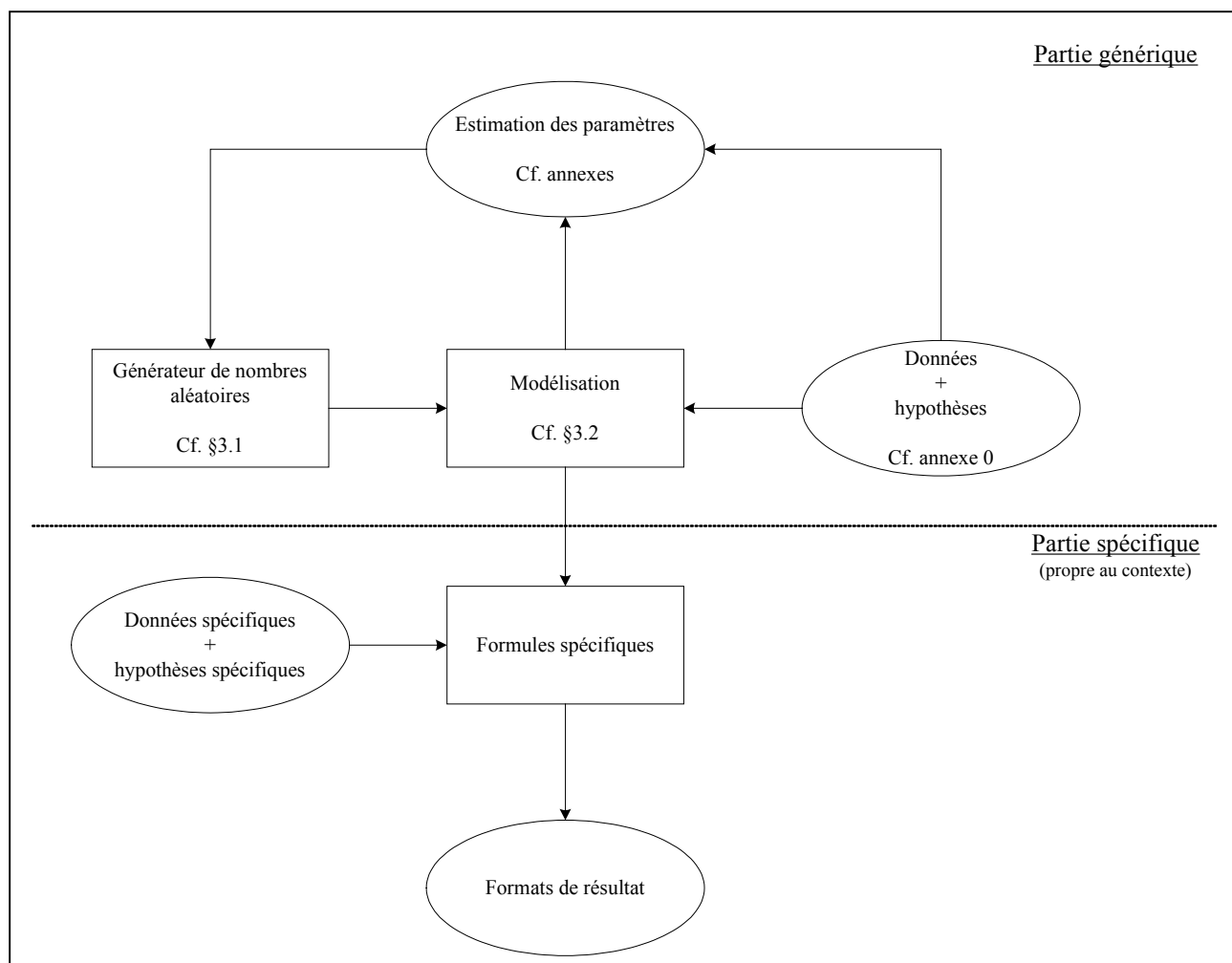
2. PRESENTATION GENERALE DU MODULE STOCHASTIQUE

Le module « actif stochastique » est conçu comme une boîte à outils générique capable de générer des trajectoires simulées pour les différents actifs composant le portefeuille.

IMAGE est un logiciel évolutif : constitué d'un grand nombre de fonctionnalités « de base », les actuaires peuvent implémenter des formules adaptées à leurs besoins spécifiques. Le logiciel est ainsi constitué de différents niveaux de programmation, qui sont appelés « contextes » sous IMAGE.

Ces trajectoires pourront alors être exploitées dans chaque contexte spécifique pour produire les résultats escomptés. Ce module constitue donc un enrichissement des fonctionnalités de base du logiciel.

Le schéma ci-dessous décrit l'architecture générale proposée.



3. MODELISATION STOCHASTIQUE DE L'ACTIF

Modifier IMAGE de manière à ce que sa partie Actif soit stochastique nécessite la sélection de modèles pour les différents types de placements et le choix de leur discrétisation afin d'être en mesure de simuler l'évolution des différents cours. Cette simulation passe par le choix d'un générateur de nombres aléatoires.

3.1. CHOIX DES METHODES

Compte tenu de leur large utilisation dans le domaine financier et de leur facilité d'utilisation, on retient des modèles de diffusion en temps continu pour modéliser l'évolution des prix des actifs pris en compte.

La mise en œuvre pratique de ces modèles implique une étape de discrétisation présentée ci-dessous.

3.1.1. DISCRETISATION

Les différents titres de placements vont suivre des dynamiques continues du type :

$$dX_t = \mu(X,t)dt + \sigma(X,t)dB_t$$

où B_t est un mouvement brownien dans l'univers historique.

Pour discrétiser ces processus, nous utiliserons le schéma d'Euler :

$$X(t_{i+1}) - X(t_i) \approx \mu(X, t_i) * (t_{i+1} - t_i) + \sigma(X, t_i) \sqrt{t_{i+1} - t_i} * \varepsilon$$

où ε est une variable aléatoire de loi $N(0,1)$.

Cette approximation est d'autant plus fine que le pas de discrétisation $(t_{i+1} - t_i)$ est petit.

3.1.2. GENERATEUR DE NOMBRE ALEATOIRE

On choisira un générateur pseudo aléatoire de période assez longue pour simuler des réalisations de variables aléatoires uniformes et la technique de Box-Muller pour les transformer en réalisations de variables de loi $N(0,1)$.

Le lecteur intéressé pourra se référer à JACQUEMIN et PLANCHET (2003) pour le choix d'un tel générateur.

3.1.3. CHOIX DE LA PROBABILITE SOUS-JACENTE

Dans un souci de cohérence avec les autres méthodes d'évaluation mises en œuvre dans IMAGE, les trajectoires seront simulées dans l'univers historique.

De plus, dans un premier temps, on ne prendra pas en compte les risques de défaut des émetteurs obligataires.

3.2. DONNEES EN ENTREE ET ALGORITHMES DE CALCUL

3.2.1. LES TAUX D'INTERET

On modélisera les taux d'intérêt à partir du modèle de Cox, Ingersoll et Ross puis on effectuera des simulations de l'évolution des taux instantanés qui nous permettront de définir la courbe des taux.

Cette courbe des taux nous permettra d'obtenir la valeur actuelle des tous les actifs financiers dont les cours seront simulés par la suite et la valeur de marché des obligations déjà en portefeuille. Elle nous permettra également de définir les taux auxquels seront placées les obligations qui seront achetées dans le futur et la rémunération du monétaire.

Entrées

- ✓ La composition du portefeuille obligataire (mêmes informations que celles demandées aujourd'hui).
- ✓ Le taux instantané à la date de début de l'étude r_0 .
- ✓ Les paramètres du modèle de CIR : a , b et σ .

Algorithme

- ✓ Récurrence pour obtenir les taux instantanés jusqu'à la date de fin de l'étude via le processus discrétisé explicité *infra*.
- ✓ Détermination de la valeur actuelle des zéro-coupons d'échéance les dates de bilan.

Modèle

L'évolution du taux sans risque instantané est modélisée par :

$$dr_t = a(b - r_t) dt + \sigma \sqrt{r_t} dB_t$$

où a , b et σ sont des paramètres constants rentrés par l'utilisateur.

Le processus va être discrétisée de la manière suivante :

$$r(t_{i+1}) - r(t_i) \approx a(b - r(t_i)) * (t_{i+1} - t_i) + \sigma \sqrt{r(t_i)} \sqrt{t_{i+1} - t_i} * \varepsilon$$

où ε est une v.a. $N(0,1)$

i.e. lorsque le pas vaut 1 :

$$r_{i+1} - r_i \approx a(b - r_i) + \sigma \sqrt{r(t)} * \varepsilon$$

On utilisera cette formule de récurrence pour déterminer les taux instantanés de la période couverte par l'étude. A partir de ces taux on déterminera le prix des zéro-coupons d'échéance les dates de bilan à l'aide de la formule ci-dessus.

La forme des prix des zéro-coupons est :

$$P(t, T) = A(t, T) \exp(-B(t, T) r(t))$$

Avec les fonctions A et B suivantes :

$$\begin{aligned} \checkmark \quad B(t, T) &= \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma + a)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \\ \checkmark \quad A(t, T) &= \left[\frac{2\gamma e^{(a+\gamma)(T-t)/2}}{(\gamma + a)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right]^{2ab/\sigma^2} \\ \checkmark \quad \gamma &= \sqrt{a^2 + 2\sigma^2} \end{aligned}$$

3.2.2. LES ACTIONS

On modélisera l'évolution des cours des actions à l'aide du modèle de Black et Scholes. Nous avons choisi de modéliser l'évaluation de chaque titre, en faisant l'hypothèse que ces actions sont corrélées entre elles par le biais du « marché ». Cette hypothèse simplificatrice rend simple l'estimation des paramètres du modèle puisque, pour chaque titre, il s'agit uniquement d'estimer son rendement espéré, sa volatilité et sa corrélation avec le marché (par le biais d'un indice de référence par exemple).

Entrées

- ✓ La composition du portefeuille action (même données que celles demandées actuellement : valeur d'achat, valeur de marché en début d'étude, nombre de titres).
- ✓ Le paramètre de corrélation du marché actions avec les taux ρ_a .
- ✓ Pour chaque ligne, la volatilité du titre σ_i , le taux continu de dividendes q_i et sa corrélation avec le restant du marché action ρ_i .

Algorithme

- ✓ On détermine dans un premier temps l'évolution du marché (information donnée par le brownien B^a).
- ✓ Pour chaque titre on détermine l'évolution du cours.

Modèle

Black et Scholes modélisent le cours des actions dans l'univers historique par la dynamique :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t$$

où μ , σ et q sont des constantes.

Supposons que le titre i ait la dynamique suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu_i - q_i)dt + \sigma_i dB_t^1$$

Faisons l'hypothèse réaliste que le cours du titre i est corrélé avec l'évolution du marché action dans son ensemble. Alors :

$$dB^1 * d\tilde{B}^a = \rho_a dt$$

où \tilde{B}^a est un mouvement brownien qui régit l'évolution du marché actions.

Il vient :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu_i - q_i)dt + \sigma_i \rho_i d\tilde{B}_t^a + \sigma_i \sqrt{1 - \rho_i^2} dB_t^i$$

où B^i est un mouvement brownien indépendant de \tilde{B}^a .

De plus, en faisant l'hypothèse que le titre i est dépendant de l'évolution des taux instantanés exclusivement par le biais du marché action, on peut écrire la dynamique du titre i :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu_i - q_i)dt + \sigma_i \rho_i \rho_a dB_t + \sigma_i \rho_i \sqrt{1 - \rho_a^2} d\tilde{B}_t^a + \sigma_i \sqrt{1 - \rho_i^2} dB_t^i$$

où :

- ✓ B_t , \tilde{B}_t^a et B_t^i sont des mouvements browniens indépendants.
- ✓ $d\tilde{B}_t^a * dB_t = \rho_a dt$
- ✓ B_t est le mouvement brownien qui régit la dynamique des taux d'intérêt.

Après intégration de l'équation différentielle stochastique, il vient une formule fermée pour le cours de l'action à une date t :

$$S_t = S_0 * \exp\left\{\int_0^t (\mu_i - q_i) du\right\} * \exp\left\{\int_0^t \left(-\frac{\sigma_i^2}{2} du + \sigma_i \rho_i \rho_a dB_u + \sigma_i \rho_i \sqrt{1 - \rho_a^2} d\tilde{B}_u^a + \sigma_i \sqrt{1 - \rho_i^2} dB_u^i\right)\right\}$$

Ce processus peut se discrétiser par :

$$\frac{S(t_{i+1}) - S(t_i)}{S(t_i)} = (\mu_i - q_i)(t_{i+1} - t_i) + \sigma_i \rho_i \rho_a \sqrt{t_{i+1} - t_i} \varepsilon + \sigma_i \rho_i \sqrt{1 - \rho_a^2} \sqrt{t_{i+1} - t_i} \varepsilon_a + \sigma_i \sqrt{1 - \rho_i^2} \sqrt{t_{i+1} - t_i} \varepsilon_i$$

où ε , ε_a et ε_i sont des v.a. indépendantes de loi $N(0,1)$

Ainsi lorsque le pas de discrétisation vaut 1 :

$$\frac{S(t+1) - S(t)}{S(t)} = \mu_i - q_i + \sigma_i \rho_i \rho_a \varepsilon + \sigma_i \rho \sqrt{1 - \rho_a^2} \varepsilon_a + \sigma_i \sqrt{1 - \rho_i^2} \varepsilon_i$$

On pourra estimer les différents paramètres (σ_i , ρ_i et ρ_a) par des régressions sur les données historiques.

3.2.3. L'IMMOBILIER

On modélisera l'évolution des cours de l'immobilier à l'aide du modèle de Black et Scholes. Faut de données historiques sur l'évolution de tel ou tel immeuble, on fera l'hypothèse que tous les biens suivent la même évolution.

Entrées

- ✓ La composition du portefeuille immobilier (même données que celles demandées actuellement).
- ✓ Le paramètre de corrélation du marché avec les taux ρ_{immo} .
- ✓ La volatilité du placement immobilier σ_{immo} .

Algorithme

- ✓ On détermine l'évolution du marché (information donnée par le brownien B^{immo}) puis on obtient la variation du cours.

Modèle

Le cours de l'immobilier est modélisé dans l'univers historique par la dynamique :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t^1$$

où μ , σ et q sont des constantes.

On fera l'hypothèse que tout les actifs immobiliers évolue de la même manière. Faisons de plus l'hypothèse que l'évolution du marché de l'immobilier est corrélée avec celle des taux. Alors :

$$dB^1 * dB = \rho_{immo} dt$$

Il vient :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu - q)dt + \sigma \rho_{immo} dB_t + \sigma \sqrt{1 - \rho_{immo}^2} dB_t^{immo}$$

où B_t^{immo} est un mouvement brownien indépendant de B_t qui est le brownien de la dynamique des taux.

$$\frac{S(t_{i+1}) - S(t_i)}{S(t_i)} = (\mu - q)(t_{i+1} - t_i) + \sigma \rho_{immo} \sqrt{t_{i+1} - t_i} \varepsilon + \sigma \sqrt{1 - \rho_{immo}^2} \sqrt{t_{i+1} - t_i} \varepsilon_{immo}$$

où ε et ε_{immo} sont des v.a. indépendantes de loi $N(0,1)$

Ainsi, lorsque le pas de discrétisation vaut 1 :

$$\frac{S(t+1) - S(t)}{S(t)} = \mu - q + \sigma \rho_{immo} \varepsilon + \sigma \sqrt{1 - \rho_{immo}^2} \varepsilon_{immo}$$

L'utilisateur pourra estimer σ et ρ_{immo} par régression sur les données historiques.

3.2.4. LE MONETAIRE

Entrée

- ✓ Le montant de trésorerie initialement disponible.
- ✓ L'horizon du taux auquel sera rémunéré le monétaire.

Algorithme

Si T_n est le montant de trésorerie disponible en n ,

$$T_{n+1} = T_n * \exp(r(n)) + P_{n+1} + A_{n+1}$$

où :

- ✓ P_n est le flux de passif en n
- ✓ A_n le flux d'actif (coupons, remboursements, dividendes, loyers, etc.) en n .

Modèle

La trésorerie pourra être rémunérée à un pourcentage du taux à 1 ans (75 % par exemple).

3.3. OBTENTION DES RESULTATS

Les résultats pourront être présentés comme actuellement sous forme de tableaux présentant les stocks et les flux de la société aux dates de bilan pendant l'horizon spécifié. Toutefois ces résultats seront issus des nombreuses simulations effectuées par le logiciel.

En effet, s'il est généré s « états du monde », le paramètre d'intérêt X_t sera estimé par la moyenne empirique de l'échantillon (x_t^1, \dots, x_t^s) constitué des observations de ce paramètre dans chacun des s « états du monde ». Une évolution supplémentaire pourrait être de permettre à l'utilisateur d'accéder à la répartition empirique du paramètre d'intérêt.

En effet si le nombre d'« états du monde » est assez important, nous pouvons utiliser la loi forte des grands nombres :

$$\bar{X} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s X_i \longrightarrow E(X)$$

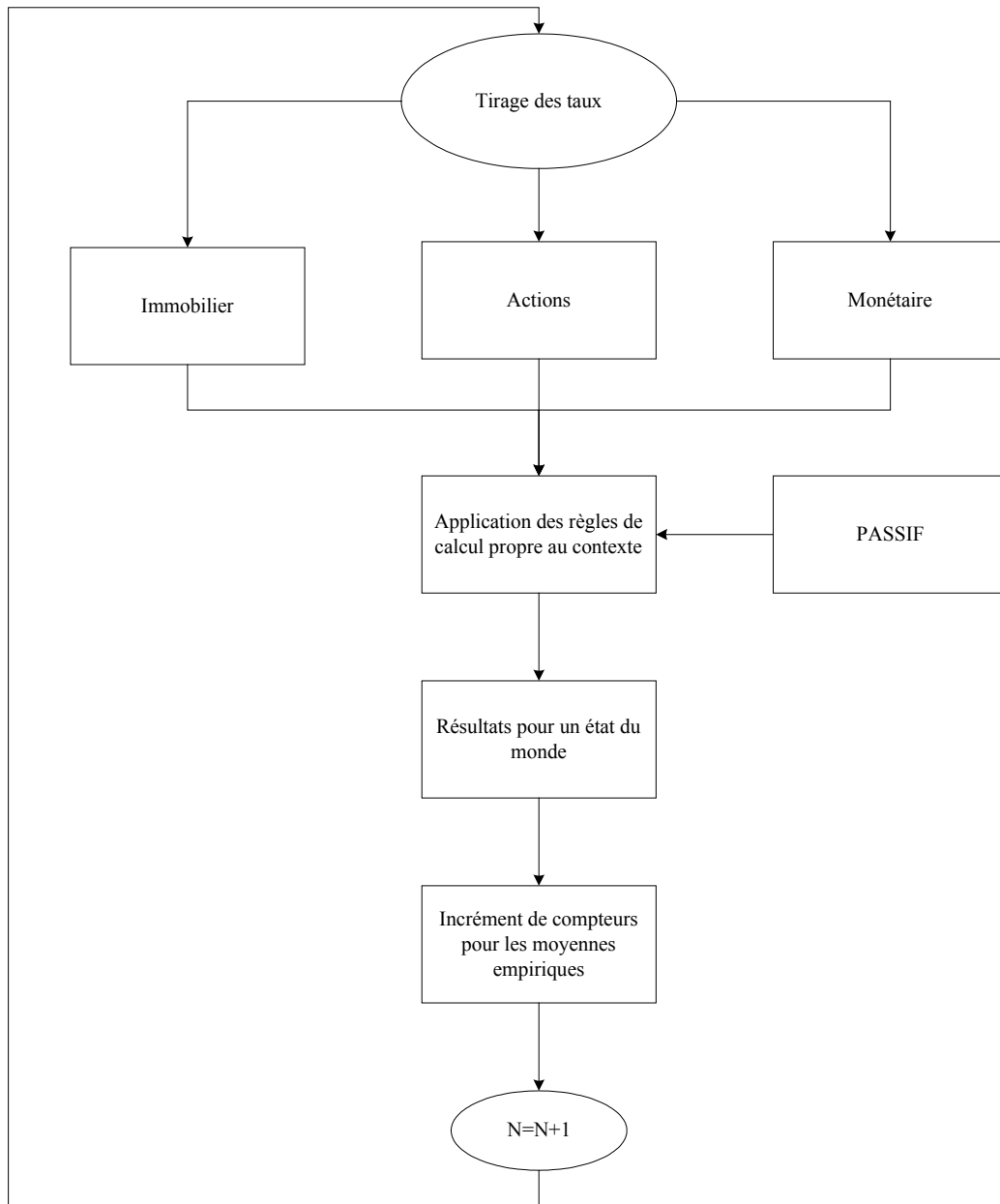
On pourra signaler, entre parenthèses à côté de la valeur estimée, une estimation de l'écart-type du paramètre fournie par l'estimateur : $\sqrt{\frac{1}{s-1} \sum_{i=1}^s (X_i - \bar{X})^2}$.

Une des fonctions d'IMAGE est de fournir des valeurs économiques de flux futurs. Ces valeurs seront elles aussi obtenues à l'aide de leur estimateur empirique.

Notons F_t le flux qui aura lieu en date t . Les s scénarii nous ont généré les valeurs (f_t^1, \dots, f_t^s) pour ce flux à la date t . Nous allons estimer $E_Q \left[F_t * \exp \left\{ - \int_0^t r_s ds \right\} \right]$ par $\frac{1}{s} \sum_{i=1}^s P_i(0, t) * f_t^i$ où $P_i(0, t)$ est le prix en 0 du zéro-coupon versant 1 en t dans le i -ème scénario.

3.4. UNE BOUCLE DE L'ALGORITHME

Le schéma ci-dessous résume l'algorithme à programmer dans le cadre du module « Actif stochastique ».



4. DESCRIPTION DU STOCKAGE DES RESULTATS

L'approche par simulation nécessite de stocker un nombre important de résultats intermédiaires ; l'objectif de la présente section est de décrire les principes de ce stockage et d'en quantifier le volume.

4.1. NOTATIONS

T l'horizon de projection (en années)

N le nombre de simulations demandées par l'utilisateur

ω_k l'état du monde généré par la k -ième simulation ($1 \leq k \leq N$)

Dans la k -ième simulation ($1 \leq k \leq N$), l'évolution de l'actif issu du moteur générique est donnée par :

- ✓ $P^{(k)}(t_1, t_2)$ le prix en t_1 du zéro-coupon sans risque de défaut versant 1 en t_2
- ✓ $S_j^{(k)}(t)$ le prix en t du titre action n° j ($1 \leq j \leq J$)
- ✓ $I^{(k)}(t)$ la valeur de l'immobilier en t .

De même on notera :

$R^{(k)}(t)$ les résultats à la date t dans l'état du monde ω_k . $R^{(k)}(t)$ a une forme variable en fonction du contexte spécifique.

4.2. STOCKAGE INTERMEDIAIRE D'UN ETAT DU MONDE POUR LES ACTIFS

Le moteur générique produit des trajectoires pour les actifs financiers. A k fixé, il faut stocker cet « état du monde » financier. En effet quels que soient les résultats demandés par la suite, pour chaque état du monde il faut stocker les valeurs d'un certain nombre de variables qui vont intervenir par la suite dans le calcul d'autres variables.

Ainsi pour la simulation n° k , il faut stocker les valeurs des :

- ✓ $P(0, t)^7$ pour $1 \leq t \leq T$ (T valeurs)
- ✓ $S_j(t)$ pour $1 \leq t \leq T$ ($T * J$ valeurs)
- ✓ $I(t)$ pour $1 \leq t \leq T$ (T valeurs)

Le stockage intermédiaire comprend donc au minimum $(J+2)*T$ valeurs pour chacune des N simulations.

4.3. RESULTATS

Nous abordons ici deux approches selon les résultats que l'on souhaite obtenir. Dans la première approche on se contente de résultats qui sont les moyennes empiriques des résultats obtenus pour chaque simulation avec un indicateur de dispersion. Dans la seconde approche, on souhaite garder la distribution obtenue par les simulations afin de pouvoir déterminer des probabilités de ruine par exemple.

⁷ La connaissance de tous les $P(0, t)$ nous permet de retrouver les $P(s, t)$ si $s < t \leq T$.

4.3.1. PREMIERE APPROCHE : STOCKAGE MINIMAL

Dans cette approche, on ne change pas le format des résultats par rapport à ce qui est déjà en place. Seule change la façon dont les variables de résultat sont calculées. On ajoute un indicateur de dispersion (variance ou écart-type) pour chaque sortie liée à l'évolution de l'actif.

Pour chaque sortie, on stocke donc deux compteurs qui s'incrémentent à chaque nouvelle simulation :

- ✓ le premier compteur est augmenté de la valeur du résultat pour chaque scénario. Ce compteur permettra d'obtenir la moyenne empirique souhaitée.
- ✓ le deuxième compteur est augmenté du carré de la valeur à chaque scénario. Il permettra d'obtenir la variance empirique de la distribution.

Exemple

Si $FP^{(k)}(t)$ représente le montant des fonds propres en t dans l'état du monde ω_k .

Alors $FP(t)$ sera estimé par : $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^N FP^{(k)}(t)$ et l'écart-type de la distribution des $FP(t)$ sera

estimé par : $\sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (FP^{(k)}(t) - FP(t))^2}$.

4.3.2. SECONDE APPROCHE : STOCKAGE COMPLET

L'objectif de cette approche est de conserver toute l'information résultante des simulations afin de pouvoir observer la distribution obtenue du résultat d'intérêt R . Il va donc falloir stocker un grand nombre de résultats :

Chaque $R^{(k)}(t)$ sera stocké $\forall k \leq N, \forall t \leq T$. Ce qui fait donc un tableau de N lignes et T colonnes pour chaque résultat d'intérêt R .

Ce paramètre d'intérêt devra être choisi par l'utilisateur en début de simulation.

Exemple

On souhaite effectuer 1 000 simulations, sur un horizon de 40 ans avec un portefeuille qui comporte de l'immobilier, des obligations et 10 lignes d'actions.

Pour disposer de la distribution empirique d'un paramètre d'intérêt, il sera nécessaire de stocker dans le cadre du stockage intermédiaire 480 valeurs par simulation. La distribution empirique du paramètre sera constituée de 1000 valeurs. Si l'on veut la distribution empirique à chaque date de bilan, ce sont 40 000 valeurs qu'il faudra stocker.

5. APPLICATION

Les comptes de résultat ci-dessous sont issus de portefeuilles de contrats et d'actifs fictifs. Ils ont pour but d'illustrer l'évolution des résultats obtenus grâce à l'implémentation d'un module « Actif stochastique ».

5.1. COMPTE DE RESULTAT DU MODELE DETERMINISTE

1	COMPTE DE RESULTAT					
2	Année de projection	31/12/2003	31/12/2004	31/12/2005	31/12/2006	31/12/2007
3	COMPTE TECHNIQUE					
4	CREDIT					
5	Primes émises nettes	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	Chargement	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
7	dont acquisition	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
8	dont encaissement	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
9	dont gestion	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
10	Produits nets de placements	4 946,15	4 994,35	3 915,19	3 922,33	3 930,64
11	dont produits nets courants	4 946,15	4 994,35	3 915,19	3 922,33	3 930,64
12	dont produits nets exceptionnels	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
13	TOTAL CREDIT	4 946,15	4 994,35	3 915,19	3 922,33	3 930,64
14						
15	DEBIT					
16	Prestations	4 328,04	4 366,53	4 362,11	4 358,11	4 355,65
17	dont capitaux décès	130,20	142,03	155,66	169,26	183,89
18	dont intérêts techniques	3,72	4,06	4,50	4,89	5,31
19	dont participation aux bénéfices	2,41	2,66	1,30	1,45	1,62
20	dont capitaux termes	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
21	dont intérêts techniques	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
22	dont participation aux bénéfices	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
23	dont rachats	4 197,85	4 224,50	4 206,45	4 188,85	4 171,76
24	dont intérêts techniques	120,00	120,74	121,50	120,96	120,44
25	dont participation aux bénéfices	77,85	79,03	35,11	35,93	35,79
26	Variation des provisions	618,11	627,83	-446,92	-435,78	-425,01
27	dont provisions mathématiques	618,11	627,83	-446,92	-435,78	-425,01
28	dont intérêts techniques	2 876,28	2 893,74	2 911,39	2 898,12	2 885,15
29	dont participation aux bénéfices	1 865,89	1 894,12	841,40	860,98	881,33
30	Frais	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
31	dont acquisition	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
32	dont encaissement	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
33	dont gestion	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
34	Commissions	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
35	TOTAL DEBIT	4 946,15	4 994,35	3 915,19	3 922,33	3 930,64
36	RESULTAT TECHNIQUE	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
37						
38	COMPTE NON TECHNIQUE					
39	CREDIT					
40	Résultat technique	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
41	Produit net des placements alloués	197,85	204,44	164,01	168,87	173,93
42	Produits exceptionnels	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
43	TOTAL CREDIT	197,85	204,44	164,01	168,87	173,93
44						
45	DEBIT					
46	Impôts sur les bénéfices	79,14	81,78	65,61	67,55	69,57
47	TOTAL DEBIT	79,14	81,78	65,61	67,55	69,57
48	RESULTAT NON TECHNIQUE	118,71	122,66	98,41	101,32	104,36
49						
50	RESULTAT	118,71	122,66	98,41	101,32	104,36
51						
52	PROVISIONS					
53	Provisions mathématiques d'ouverture	100 000,000000	100 618,112226	101 245,938267	100 799,019136	100 363,242541
54	Provisions mathématiques de clôture	100 618,112226	101 245,938267	100 799,019136	100 363,242541	99 938,229694
55						
56	NOMBRES DE CONTRATS					
57	Nombre de contrats en début de période	100,00000	95,87594	91,91197	88,09944	84,43307
58	Nombre de contrats en fin de période	95,87594	91,91197	88,09944	84,43307	80,90607
59	Nombre de rachats	4,00000	3,83504	3,67648	3,52398	3,37732
60	Nombre de décès	0,12406	0,12893	0,13605	0,14239	0,14888
61						
62	SOLDES					
63	Solde de souscription	-80,26	-81,69	-36,41	-37,39	-30,41
64	Solde de gestion	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
65	Solde financier	80,26	81,69	36,41	37,39	30,41
66	SOLDE TOTAL	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

5.2. COMPTE DE RESULTAT DU MODELE STOCHASTIQUE

1	COMPTE DE RESULTAT						
2	Année de projection	31/12/2003	31/12/2004	31/12/2005	31/12/2006	31/12/2007	31/12/2008
3	COMPTE TECHNIQUE						
4	CREDIT						
5	Primes émises nettes	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	Chargement	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
7	dont acquisition	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
8	dont encaissement	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
9	dont gestion	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
10	Produits nets de placements	4 918,49	5 007,67	3 923,15	3 924,65	3 929,97	3 388,44
11							
12							
13	TOTAL CREDIT	4 918,49	5 007,67	3 923,15	3 924,65	3 929,97	3 388,44
14							
15	DEBIT						
16	Prestations	4 328,04	4 366,53	4 362,11	4 358,11	4 355,65	4 333,76
17	dont capitaux décès	130,20	142,03	155,66	169,26	183,89	200,66
18	dont intérêts techniques	3,72	4,06	4,50	4,89	5,31	5,82
19	dont participation aux bénéfices	2,41	2,66	1,30	1,45	1,62	0,76
20	dont capitaux termes	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
21	dont intérêts techniques	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
22	dont participation aux bénéfices	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
23	dont rachats	4 197,85	4 224,50	4 206,45	4 188,85	4 171,76	4 133,11
24	dont intérêts techniques	120,00	120,74	121,50	120,96	120,44	119,93
25	dont participation aux bénéfices	77,85	79,03	35,11	35,93	36,79	15,65
26	Variation des provisions	618,11	627,83	-446,92	-435,78	-425,01	-944,30
27	dont provisions mathématiques	618,11	627,83	-446,92	-435,78	-425,01	-944,30
28	dont intérêts techniques	3 000,00	3 018,54	3 037,38	3 023,97	3 010,90	2 990,15
29	dont participation aux bénéfices	1 946,15	1 975,81	877,81	898,36	919,74	391,32
30	Frais	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
31	dont acquisition	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
32	dont encaissement	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
33	dont gestion	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
34	Commissions	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
35	TOTAL DEBIT	4 946,15	4 994,35	3 915,19	3 922,33	3 930,64	3 389,47
36	RESULTAT TECHNIQUE	-27,66	13,31	7,96	2,32	-0,67	-1,03
37	COMPTE NON TECHNIQUE						
38	CREDIT						
39	Résultat technique	-27,66	13,31	7,96	2,32	-0,67	-1,03
40	Produit net des placements alloués	199,23	204,98	164,35	168,97	173,90	154,12
41	Produits exceptionnels						
42	TOTAL CREDIT	199,23	204,98	164,35	168,97	173,90	154,12
43							
44	DEBIT						
45	Impôts sur les bénéfices	4,50	12,52	24,15	23,70	22,96	39,62
46	TOTAL DEBIT	4,50	12,52	24,15	23,70	22,96	39,62
47	RESULTAT NON TECHNIQUE	194,73	192,47	140,20	145,27	150,94	114,49
48							
49							
50	RESULTAT	167,06	205,78	148,15	147,59	150,27	113,47
51							
52	PROVISIONS						
53	Provisions mathématiques d'ouverture	100 000,00	100 618,11	101 245,94	100 799,02	100 363,24	99 938,23
54	Provisions mathématiques de clôture	100 618,11	101 245,94	100 799,02	100 363,24	99 938,23	98 993,93
55							
56	NOMBRES DE CONTRATS						
57	Nombre de contrats en début de période	100,00	95,88	91,91	88,10	84,43	80,91
58	Nombre de contrats en fin de période	95,88	91,91	88,10	84,43	80,91	77,51
59	Nombre de rachats	4,00	3,84	3,68	3,52	3,38	3,24
60	Nombre de décès	0,12	0,13	0,14	0,14	0,15	0,16
61							
62	SOLDES						
63	Solde de souscription	-80,26	-81,69	-36,41	-37,39	-38,41	-16,41
64	Solde de gestion	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
65	Solde financier	52,60	95,00	44,37	39,70	37,74	15,39
66	SOLDE TOTAL	-27,66	13,31	7,96	2,32	-0,67	-1,03
67	PROBABILITES						
68	Probabilité de perte sur l'année	4,20	1,00	10,70	11,60	12,10	28,80
69	Probabilité d'au moins une perte passée	4,20	5,10	15,00	17,10	19,70	35,00

Sur un grand nombre de simulations, si les paramètres des modèles sont bien calibrés, la moyenne empirique des estimations sera proche de l'espérance de la variable d'intérêt. Le modèle stochastique peut nous permettre d'avoir la distribution empirique de ces éléments.

Les deux dernières lignes du tableau « Compte de résultat stochastique » comportent des estimations des probabilités : probabilité de perte sur l'année et probabilité d'une perte au moins dans le passé. On obtient également le même type de tableau avec les estimations des écart-types pour les variables dépendantes de l'évolution du cours des actifs.

CONCLUSION

Les différents travaux exposés dans ce mémoire nous ont permis de présenter les outils financiers indispensables à l'évaluation des engagements assurantiels telle qu'elle est préconisée par l'IASB. Ces outils ont été ensuite illustrés, principalement dans le cadre du contrat d'épargne en euros avec taux garanti et clause de participation aux bénéfices et dans le cadre de l'évaluation de l'engagement généré par l'attribution de stock-options.

Toutefois, on l'a vue, l'utilisation de telles techniques financières doit être faite avec prudence. En effet, certains axiomes sur lesquelles elles reposent ne sont pas forcément vérifiés en assurance, c'est le cas des hypothèses sous-jacentes à l'utilisation de la mesure risque-neutre par exemple.

Une solution pour contourner ce problème pourrait consister en l'utilisation de fonctions d'utilité, que ce soit pour modéliser le comportement des assurés ou les préférences des sociétés. Cela peut paraître satisfaisant d'un point de vue théorique, mais fastidieux à mettre en oeuvre puisque cela nécessiterait l'estimation des paramètres du modèle retenu et l'étude de sa robustesse avec peu, voire pas, de données.

L'utilisation de techniques de simulations sous la probabilité historique, avec des règles de décision simples mais raisonnables semble, en attendant des résultats théoriques futurs, être ce qu'il y a de plus adapté à notre problématique.

On remarquera que les différentes illustrations numériques de ce mémoire ont été produites à partir de paramètres choisis de manière arbitraire. En effet l'estimation des paramètres est une étape souvent délicate dans l'utilisation d'un modèle, puisqu'elle nécessite de bonnes connaissances statistiques et de disposer de suffisamment de données. Cette estimation n'est pas l'objet de cette étude, mais il est important de souligner son importance et donc l'attention que l'on doit y porter.

L'autre aspect majeur de l'utilisation de modèles est l'étude de leur robustesse. On pourra consulter DUPIN G., MONFORT A., VERLE J.P. (2003) à ce sujet.

Notons également que les techniques de simulation exigent la discrétisation de modèles de diffusion continus. Cette discrétisation crée un biais qui, par certaines méthodes, peut être réduit. Toutes les discrétisations effectuées l'ont été selon le schéma d'Euler, on pourra se tourner vers le schéma de Milstein qui est plus précis et induit un gain dans l'étape de calibration du modèle. On trouvera dans GIET L. (2003) une étude sur l'impact du choix du procédé de discrétisation.

Par ailleurs, on notera que de nombreux développements à ce mémoire peuvent être envisagés, notamment en reprenant l'évaluation du contrat d'épargne décrit dans la deuxième partie et en cherchant à modéliser l'évolution du taux garanti et l'évaluation de la clause de rachat. A ce sujet, on remarquera les travaux de ANDREATTA G. et CORRADIN S. (2003) qui comparent deux approches séduisantes de valorisation de cette option. Pour être complet sur ce sujet, il faudrait également intégrer au modèle la mortalité et valoriser la clause de prorogation du contrat.

Enfin l'allocation d'actifs d'un régime de rentes est un sujet sur lequel de nombreux développements sauront être utiles, notamment en conséquence de l'application de la Loi Fillon sur les retraites et de l'obligation qu'elle génère de gérer en canton les actifs d'un PEIR.

BIBLIOGRAPHIE GÉNÉRALE

- ANDREATTA G., CORRADIN S., “Fair Value of Life Liabilities with Embedded Options : an Application to a Portfolio of Italian Insurance Policies”, AFIR Colloquium, 2003.
- AUGROS J. C., MORENO M., *Les dérivés financiers et d'assurance*, Economica, 2002.
- BACINELLO A.R., “Fair pricing of life insurance participating policies with a minimum interest rate guaranteed”, *ASTIN Bulletin*, **31** (2), pp. 275-297, 2001.
- BACINELLO A.R., “Fair valuation of the surrender option embedded in a guaranteed life insurance participating policy”, papier de recherche, Università degli Studi de Trieste, 2001.
- BACINELLO A.R., “Pricing guaranteed life insurance participating policies with periodical premiums and surrender option”, papier de recherche, Università degli Studi de Trieste, 2002.
- BLACK F., SCHOLES M., “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *Journal of Political Economy*, **81** (3), pp. 637-654, 1973.
- BOUWKNEGT P., PELSSER A., “Market Value of Insurance Contracts with Profit Sharing”, AFIR Colloquium, 2001.
- BRENNAN M.J., SCHWARTZ E.S., “The Pricing of Equity-Linked Life Insurance Policies with an Asset Value Guarantee”, *Journal of Financial Economics*, **3**, pp. 195-213, 1976.
- DE FELICE M., MORICONI F., “A course on Finance of Insurance”, *Groupe Consultatif Actuariel Européen*, vol. 1, 2002.
- DEMERLE E., FELIX J.P., “Méthodes d'évaluation des options contenues dans les contrats d'épargne en euros”, séminaire scientifique de l'Institut des Actuaire, 25 février 2003.
- DOUARD H., “Normes IAS : Une nouvelle donne comptable pour les sociétés européennes cotées, un enjeu pour les actuaire”, *Bulletin Français d'Actuariat*, **4** (8), pp.141-151, 2000.
- DUPIN G., MONFORT A., VERLE J.P., “Robust Inference in Rating Models”, ASTIN Colloquium, 2003
- FARGEON L., NISSAN K., “Recherche d'un modèle actuariel d'analyse dynamique de la solvabilité d'un portefeuille de rentes viagères”, rapport d'un groupe de travail ENSAE, 2003.
- FFSA, *L'assurance française en 2002*, rapport annuel, juin 2003.
- GEMAN H., EL KAROUI N., ROCHET J.C., “Changes of numeraire, changes of probability measures and pricing options”, *Journal of Applied Probability*, pp. 433-458, 1995.

- GIET L., “Estimation par inférence indirecte des équations de diffusion : l’impact du choix du procédé de discrétisation”, papier de recherche, GREQAM-CNRS, 2003.
- GROSEN A., JORGENSEN P.L., “Fair valuation of life insurance liabilities: The impact of interest rate guarantees, surrender options and bonus policies”, *Insurance: Mathematics and Economics*, **26**, pp. 37-57, 2000.
- HANSEN M., “Applying Financial Economics to Life and Pension Insurance”, thèse, University of Southern Denmark, 2002.
- HARRISSON J.M., KREPS D., “Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets”, *Journal of Economic Theory*, **20**, 1979.
- HARRISSON J.M., PLISKA S., “Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading”, *Stochastic Processes and their Applications*, **11**, 1981.
- HULL J.C., *Options, Futures & Other Derivatives*, 4^{ème} édition, Prentice-Hall, 1999.
- JACQUEMIN J., PLANCHET F., “Méthodes de simulation”, article soumis au *Bulletin Français d’Actuariat*, 2003.
- KARATZAS I., SHREVE S.E., *Brownian motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, 1988.
- LAMBERTON D., LAPEYRE B., *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, 2^{nde} édition, ellipses, 1997.
- MERLUS S., PEQUEUX O., “Les garanties plancher des contrats d’assurance-vie en unités de compte: tarification et couverture”, mémoire d’actuaire ENSAE, 2000.
- PETAUTON P., *Théorie et pratique de l’assurance vie*, Dunod, 1991.
- PRUDENT C., “La clause de rachat anticipé évaluée comme une option”, séminaire FFSA, 1996.
- QUITTARD-PINON F., *Mathématiques financières*, ems, 2002.
- SAPORTA G., *Probabilités, analyse des données et statistique*, Technip, 1990.
- TORKEN SAS, “IFRS et assureurs : principaux impacts sur les systèmes d’informations”, dossier commercial, 2003.
- VERON N., “Normalisation comptable internationale : une gouvernance en devenir”, complément au rapport du Conseil d’Analyse Economique : *Les normes comptables et le monde post-Enron*, 2003.